Capitolo 1

Elementi di teoria degli insiemi

Soluzioni Esercizi

Esercizi Capitolo 1

Esercizio 1.6.1 Siano A e B i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} |\ x^2 \leq 12\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N} |\ x + 1 \text{ sia primo}\}.$$

Determinare $A \cap B$ e $A - B$.

Soluzione Esercizio:

L'insieme A è così costituito:

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\};$$

mentre l'insieme B è infinito: $B = \{1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28, 30, 36, \ldots\}$.

Si ha quindi:

$$A \cap B = \{1, 2\}, \qquad A - B = \{-3, -2, -1, 0, 3\}.$$

Esercizio 1.6.2 Considerare i seguenti insiemi:

$$A = \{2, 5, 7, 8, 12\}; \quad B = \{1, 2, 3, 5\}; \quad C = \{7, 8\}.$$

Determinare $A \cap B$, $B \cup C$, $A - B$, $A - C$, $C - B$.

Soluzione Esercizio:

Avremo:

$$A \cap B = \{2.5\};$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\};$$

$$A - B = \{7, 8, 12\};$$

$$A - C = \{2, 5, 12\};$$

$$C - B = \{7, 8\} = C.$$

Esercizio 1.6.3 Considerare i seguenti insiemi:

$$A = \{2, 5, 7, 8\}; \quad B = \{2, 5, \{7, 8\}\}; \quad C = \{7, 8\}; \quad D = \{5\}.$$

Determinare quali delle seguenti relazioni siano vere e quali false:

$A \subset B$; $C \subset A$; $C \subset B$; $C \in A$; $C \in B$; $D \in A$; $D \subset B$; $5 \in D$.

Soluzione Esercizio: $A \subset B$ Falso; $C \subset A$ Vero; $C \subset B$ Falso; $C \in A$ Falso; $C \in B$ Vero; $D \in A$ Falso; $D \subset B$ Vero; $5 \in D$ Vero.

Esercizio 1.6.4 Considerare i seguenti insiemi:
$V = \{$ Tutti i veicoli $\}$; $A = \{x \in V \mid x$ ha propulsione elettrica$\}$;
$B = \{ x \in V | \, x$ sia un'auto $\}$ $C = \{x \in V \mid x$ ha un motore a benzina $\}$.
1) Determinare $A \cap B$, $A - B$, $A \cap C$, $B - (C \cup A)$
2) Sia p un autobus urbano a metano e q un locomotore di un treno "Freccia Rossa" di Trenitalia. È vero che $q \in A \cup B \cup C$? E $p \in A \cup B$?

Soluzione Esercizio:
Parte 1)
$A \cap B = \{$ Auto a propulsione elettrica $\}$;
$A - B = \{$ Veicoli a propulsione elettrica che non sono auto $\}$;
$A \cap C = \{$ Veicoli ibridi con un motore elettrico e uno a benzina $\}$;
$B - (C \cup A) = \{$ Auto a propulsione non elettrica e non a benzina $\}$ (ad esempio diesel).
Parte 2)
$q \in A \cup B \cup C$, Vero;
$p \in A \cup B$, Falso.

Esercizio 1.6.5 Considerare i seguenti insiemi:

$$A = \{1, 2, 5\}; \quad B = \{+, *\}.$$

Determinare $A \times B$, $B \times A$, $B^2 = B \times B$.

Soluzione Esercizio:
$A \times B = \{(1, +), (2, +), (5, +), (1, *), (2, *), (5, *)\}$;
$B \times A = \{(+, 1), (+, 2), (+, 5), (*, 1), (*, 2), (*, 5)\}$;
$B^2 = B \times B = \{(+, +), (+, *)(*, +), (*, *)\}$.

Esercizio 1.6.6 La soluzione di questo esercizio è presente sul testo cartaceo.

Esercizi 1.6.7 e 1.6.8 Dire se le seguenti leggi rappresentano funzioni se considerate $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Se sono funzioni, dire se siano iniettive, suriettive.

$$f(n) = 3n + 2; \quad f(n) = 2n - 1; \quad f(n) = \frac{2n+1}{3}; \quad f(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Per le f che siano funzioni dire se sono iniettive e/o suriettive.

Soluzione Esercizi:

$f(n) = 3n+2$ è una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, in quanto $\forall n \in \mathbb{N}$, $3n+2$ esiste in $\mathbb{N}$ ed è unico (quindi è anche una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$).

La funzione è sempre iniettiva (se $n \neq m$, anche $3n + 2 \neq 3m + 2$). Non è suriettiva in quanto non ogni numero naturale è della forma $3n+2$ (quindi non è suriettiva neanche come funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$).

$f(n) = 2n - 1$ non è una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, in quanto $f(0)$ non è definito in $\mathbb{N}$ (varrebbe -1). La f risulta invece una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. La funzione è iniettiva, ma non suriettiva né vista $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ né $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (le immagini sono solo numeri interi dispari).

$f(n) = \frac{2n+1}{3}$ non è una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, né $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, in quanto ad esempio $f(0)$ o $f(2)$ non son definiti in $\mathbb{N}$ né in $\mathbb{Z}$. La f è invece una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$), ove risulta iniettiva ma non suriettiva (le immagini hanno solo denominatore 3).

$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ è una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, in quanto $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ esiste in $\mathbb{N}$ ed è unico, infatti se n è pari, allora $n+1$ è dispari, e viceversa; quindi il prodotto $n(n+1)$ è sempre pari e divisibile per 2. Naturalmente allora f è una funzione anche $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. La funzione è sempre iniettiva, ma mai suriettiva, ad esempio non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = 4$.

Esercizio 1.6.9 Considerare la funzione $f(x) = 3x - 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; dimostrare che è biunivoca e determinare la funzione f^{-1}.

Soluzione Esercizio: La funzione $f(x) = 3x - 1$ è iniettiva in quanto $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si ha che $f(x_1) = 3x_1 + 2 = f(x_2) = 3x_2 + 2$ se e solo se $x_1 = x_2$. La funzione $f(x) = 3x-1$ è anche suriettiva, in quanto $\forall y \in \mathbb{R}$, si ha $f(x) = y$ se e solo se $y = 3x - 1$, cioè $x = \frac{y+1}{3}$; quindi $\forall y \in \mathbb{R}$, esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$.

Allora la f, essendo iniettiva e suriettiva, è biunivoca.

La funzione f^{-1} risulta essere, da quanto sopra visto, $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$; infatti $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$.

Esercizio 1.6.10 Considerare l'operazione di sottrazione su $\mathbb{Z}$ e dire quali delle proprietà nella definizione di gruppo commutativo sono soddisfatte dalla struttura $(\mathbb{Z}, -)$.

Soluzione Esercizio:

- Proprietà associativa: Non vale, infatti: $x - (y - z) = x - y + z$, mentre $(x - y) - z = z - y - z$.

- Esistenza dell'elemento neutro: Non vale, infatti seppure sia vero che $\forall z \in \mathbb{Z}$ si ha: $z - 0 = z$, non si ha: $0 - z = z$; perché 0 sia elemento neutro dovrebbero valere entrambe.

- Esistenza dell'inverso. Non esistendo l'elemento neutro, non ha senso porsi il problema dell'esistenza dell'inverso degli elementi, che è legata ad esso.

- Proprietà commutativa: Non vale: in generale, $z - x \neq x - z$.

Esercizio 1.6.11 La soluzione di questo esercizio è presente sul testo cartaceo.

Esercizio 1.6.12 Dimostrare, usando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, la somma dei numeri dispari da 1 a $2n+3$ è pari a $(n+2)^2$; cioè dimostrare che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ vale la:

$$\mathcal{P}(n): \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+3) = (n+2)^2.$$

Attenzione: Per un errore di stampa, nel libro l'esercizio riporta $(2n+2)^2$ invece di $(n+2)^2$.

Soluzione Esercizio: Usando il principio di induzione dobbiamo dimostrare che è vera $\mathcal{P}(0)$ e che se è vera $\mathcal{P}(n)$, allora lo è anche $\mathcal{P}(n+1)$.

Si ha:

$$\mathcal{P}(0): \quad 1 + 3 = 4 = 2^2.$$

Che è quindi vera. Supponiamo adesso che $\mathcal{P}(n)$ valga e dimostriamo che vale $\mathcal{P}(n+1)$, cioè che:

$$\mathcal{P}(n+1): \quad 1+3+5+\cdots+(2n+3)+[2(n+1)+3] = [(n+1)+2]^2 = (n+3)^2.$$

Poiché $\mathcal{P}(n)$ vale, si ha che $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+3) = (n+2)^2$; quindi

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+3) + [2(n+1)+3] = (n+2)^2 + [2(n+1)+3] =$$

$$= n^2 + 4n + 4 + 2n + 2 + 3 = 4n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2$$

Che è esattamente quanto afferma la $\mathcal{P}(n+1)$, e la proprietà resta dimostrata in generale.

Esercizio 1.6.13 Nell'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali in una variabile x, consideriamo le consuete operazioni di somma e prodotto di polinomi. $(\mathbb{R}[x], +)$ è un gruppo commutativo? La struttura $(\mathbb{R}[x], +, \times)$ è un anello?

Soluzione Esercizio:

$(\mathbb{R}[x], +)$ è un gruppo commutativo, infatti la somma fra polinomi è commutativa e associativa; l'elemento neutro esiste in $\mathbb{R}[x]$ ed è il polinomio nullo $\mathbf{0}$. Infine per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ l'inverso rispetto alla somma esiste ed è il polinomio $-p(x)$.

$(\mathbb{R}[x], +, \times)$ è un anello, infatti anche il prodotto di polinomi è associativo, esiste l'elemento neutro rispetto al prodotto (il polinomio costante 1) e vale la proprietà distributiva:

$$\forall p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x], p(x)[q(x) + r(x)] \;=\; p(x)q(x) + p(x)r(x).$$

Inoltre $(\mathbb{R}[x], +, \times)$ è un anello commutativo, poiché

$$\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x], p(x)q(x) = q(x)p(x).$$

Non è invece un campo, in quanto ad esempio il polinomio x non ha un inverso rispetto al prodotto: non esiste un polinomio $p(x)$ tale che $x.p(x) = 1$. [Notare che la frazione $\frac{1}{x}$ non è un polinomio].

Esercizio 1.6.14 Dire se $(A, *)$ sia una struttura algebrica nei seguenti casi:

- $A = \mathbb{Z}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$: $a * b = a + b – 3$;
- $A = \mathbb{Q}$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$: $a * b = \frac{a}{b-1}$;
- $A = \mathbb{Q}$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$: $a * b = -\frac{ab}{2}$.

Soluzione Esercizio:

- $A = \mathbb{Z}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$: $a * b = a + b – 3$, $(A, *)$ è una struttura algebrica, l'operazione è sempre eseguibile (e il risultato è unico). Inoltre $(A, *)$ è un gruppo commutativo: è facile vedere che l'operazione è associativa, commutativa e che 3 è l'elemento neutro; l'inverso di ogni $a \in \mathbb{Z}$ sarà $(6 - a)$, infatti $a * (6 - a) = a + 6 - a - 3 = 3$.
- $A = \mathbb{Q}$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$: $a * b = \frac{a}{b-1}$; $(A, *)$ non è una struttura algebrica: l'operazione non è definita per $b = 1$. Sarebbe un'operazione su $\mathbb{Q} - \{1\}$.
- $A = \mathbb{Q}$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$: $a * b = -\frac{ab}{2}$, $(A, *)$ è una struttura algebrica: l'operazione è sempre eseguibile. Inoltre l'operazione è commutativa, associativa, ha -2 come elemento neutro e ogni elemento ha inverso pari a $\frac{4}{a}$, tranne lo 0.