Capitolo 2

Spazi vettoriali

Soluzioni Esercizi

Esercizio 2.5.1 Dati, in $\mathbb{R}^3$, i vettori $\mathbf{v}_1 := \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $\mathbf{v}_2 := (1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 := (2, 1, 0)$, sia $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \frac{3}{2}\mathbf{v}_3$. Scrivere $\mathbf{u}$ come combinazione lineare dei seguenti vettori: $\mathbf{w}_1 := (0, 0, 3)$, $\mathbf{w}_2 := (0, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 := (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Soluzione Esercizio: Si avrà:

$$\mathbf{u} = 2\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) + 2(1, 1, -1) - \frac{3}{2}(2, 1, 0) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Dovremo poi determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$, tali che:

$$a(0, 0, 3) + b(0, 1, 1) + c(-1, 1, 0) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Questo ci dà: $-c = 0$, $b + c = \frac{1}{2}$, $3a + b = 0$, da cui si ricava: $c = 0$, $b = \frac{1}{2}$ e $a = -\frac{1}{6}$. Quindi:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{6}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_2.$$

Esercizio 2.5.2 La soluzione di questo esercizio è presente sul testo cartaceo.

Esercizio 2.5.3 Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ un suo elemento. Verificare che l'insieme $W = \{\mathbf{w} \in V | \mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}\}$, formato dai multipli di $\mathbf{v}$, è uno sottospazio vettoriale di V.

Soluzione Esercizio: Si devono verificare due condizioni:

1) $\mathbf{0}_V \in W$; infatti $\mathbf{0}_V = 0.\mathbf{v} \in W$.

2) $\forall\,\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si deve avere $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 \in W$. Infatti si avrà $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}$; $\mathbf{w}_2 = a_2\mathbf{v}$; quindi $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 = \alpha a_1\mathbf{v} + \beta a_2\mathbf{v} = (\alpha a_1 + \beta a_2)\mathbf{v} \in W$.

Esercizio 2.5.4 Considerare le strutture $(\mathbb{R}^2, +, \times_1)$, $(\mathbb{R}^2, +, \times_2)$ ove la somma sia quella usuale, ma l'operazione di prodotto fra numeri reali ed elementi di $\mathbb{R}^2$ sia definita da:

$$\lambda \times_1 (a, b) \ = (\lambda^2 a,\ \lambda^2 b), \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2;$$

oppure da:

$$\lambda \times_2 (a, b) \ = (2\lambda a, 2\lambda b), \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2;$$

Le strutture $(\mathbb{R}^2, +, \times_1)$ ed $(\mathbb{R}^2, +, \times_2)$ sono spazi vettoriali?

Soluzione Esercizio: La struttura $(\mathbb{R}^2, +, \times_1)$ non è uno spazio vettoriale, infatti non vale la proprietà distributiva:
$(\alpha + \beta) \times_1 (x, y) = ((\alpha + \beta)^2 x, (\alpha + \beta)^2 y)$,
mentre
$\alpha \times_1 (x, y) + \beta \times_1 (x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y) + (\beta^2 x, \beta^2 y) =$
$= ((\alpha^2 + \beta^2)x, (\alpha^2 + \beta^2)y)$.

Neanche la struttura $(\mathbb{R}^2, +, \times_2)$ è uno spazio vettoriale, infatti si avrà:
$1 \times_2 (x, y) = (2x, 2y)$ (e non (x, y)).

Esercizio 2.5.5 Considerare la struttura $(\mathbb{Z}, +, \times)$, ove $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi, la somma è quella usuale, ma l'operazione "$\times$" di prodotto fra numeri reali ed elementi di $\mathbb{Z}$ sia definita da:

$$\alpha \times z \ = 0, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{Z};$$

La struttura $(\mathbb{Z}, +, \times)$ è uno spazio vettoriale?

Soluzione Esercizio: La struttura $(\mathbb{Z}, +, \times)$, non è uno spazio vettoriale; infatti valgono tutte le proprietà degli spazi vettoriali eccetto la seguente:
$\forall z \in \mathbb{Z}:\ 1 \times z = z$; in quanto si ha invece $1 \times z = 0$.

Esercizio 2.5.6 Dire se i seguenti sottoinsiemi sono anche sottospazi (nei rispettivi $\mathbb{R}^n$):
$W = \{(x, y, z) | x - 3y + 4z = 0\}$;
SI: $W = \{(3y - 4z, y, z)\}$.
$W = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\}$,
SI: $W = \{(0, 0, 0)\}$.
$W = \{(x, y, z) | x - y = 0, x + z = 0\}$;
SI: $W = \{(x, x, -x)\}$.
$W = \{(x, y, z, t) | 3x - t = y + z, x - y + z = 0\}$;
SI: $W = \{(y - z, y, z, 2y - 2z)\}$.

$W = \{(x, y, z)|x^2 - 3y = 0\}$;
NO: $(3,3) \in W$, ma $2(3,3) = (6,6) \notin W$.
$W = \{(x, y)|x^2 = y^2\}$;
NO: $(3,3), (1,-1) \in W$, ma $(3,3) + (1,-1) = (4,2) \notin W$.
$W = \{(x, y)|x = \sin y\}$;
NO: $(0, \pi) \in W$, ma $\frac{1}{2}(0, \pi) = (0, \frac{\pi}{2}) \notin W$.
$W = \{(x, y, z)| \sin^2 x + \sin^2 y - 1 = z\}$.
NO: $(0,0,0) \notin W$.

Esercizio 2.5.7

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi di $V = \mathbb{R}^3$:

$$S_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\},$$

$$S_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1\},$$

$$S_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0\}.$$

Soluzione Esercizio:

$S_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} = \{(0, x_2, x_3)\}$ è un sottospazio.
$S_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1\}$, non lo è : $(0,0,0) \notin S_2$.
$S_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0\}$ non lo è : $(1,0,0) \in S_2$, ma il suo opposto $(-1,0,0) \notin S_2$.

Esercizio 2.5.8

Verificare che
$S := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\}$
è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e calcolarne una base.

Soluzione Esercizio:

Si ha che $S = \{(x_1, x_2, x_1 + 3x_2 + 4x_4, x_4)\}$; basta controllare che $(0,0,0,0) \in S$ (ovvio), e che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S$, allora $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in S$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Siano:
$\mathbf{v}_1 = ((a_1, a_2, a_1 + 3a_2 + 4a_4, a_4)$, $\mathbf{v}_2 = ((b_1, b_2, b_1 + 3b_2 + 4b_4, b_4)$; allora:
$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = ((a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_1 + 3a_2 + 4a_4 + b_1 + 3b_2 + 4b_4, a_4 + b_4) \in S$.
E quindi $S \subset \mathbb{R}^4$ è un sottospazio.

Esercizio 2.5.9

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

è uno sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione Esercizio:

Notare che nel capitolo *Sistemi Lineari* si mostra che le soluzioni si ogni sistema lineare omogeneo formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Nel nostro caso l'insieme S delle soluzioni del sistema dato si può scrivere come: $S = \{(-3y, y, -11y)\}$. Si ha quindi che $(0,0,0) \in S$ e che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S$, allora $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in S$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, infatti siano: $\mathbf{v}_1 = (-3y_1, y_1, -11y_1)$, $\mathbf{v}_2 = (-3y_2, y_2, -11y_2)$, si avrà :

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = (-3ay_1, ay_1, -11ay_1) + (-3by_2, by_2, -11by_2) =$$
$$= (-3ay_1 - 3by_2, ay_1 + by_2, -11ay_1 - 11by_2) =$$
$$= (-3(ay_1 + by_2), ay_1 + by_2, -11(ay_1 + by_2)) \in S.$$

Esercizio 2.5.10

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di vettori applicati in P_0. Siano π un piano passante per P_0 ed r, s due rette per P_0. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi:

- $S_\pi := \{(P - P_0) \in V \mid P \in \pi\}$,
- $S_r := \{(P - P_0) \in V \mid P \in r\}$,
- $S_s := \{(P - P_0) \in V \mid P \in s\}$,
- $S_r \cup S_s$.

Soluzione Esercizio:

- $S_\pi := \{(P - P_0) \in V \mid P \in \pi\}$, è un sottospazio (ogni combinazione lineare di vettori in π resta in π).
- $S_r := \{(P - P_0) \in V \mid P \in r\}$, è un sottospazio (ogni combinazione lineare di vettori in r resta in r).
- $S_s := \{(P - P_0) \in V \mid P \in s\}$, è un sottospazio (ogni combinazione lineare di vettori in s resta in s).
- $S_r \cup S_s$ NON è un sottospazio (una combinazione lineare un vettore in r ed uno in s non resta necessariamente in $r \cup s$).

Esercizio 2.5.11

Dimostrare che due vettori in $\mathcal{V}^2_O$ sono linearmente indipendenti se e solo se non giacciono sulla stessa retta.

Soluzione Esercizio: Se due vettori sono linearmente indipendenti uno non è multiplo dell'altro, e quindi non giace nella stessa retta (due vettori di $\mathcal{V}^2_O$ che sono uno multiplo dell'altro giacciono sulla stessa retta).

Se due vettori di $\mathcal{V}^2_O$ non giacciono sulla stessa retta allora nessuno dei due è multiplo dell'altro, quindi nessuno dei due è generato dall'altro, il che equivale a dire che sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2.5.12

Dimostrare che tre vettori in $\mathcal{V}^3_O$ sono linearmente indipendenti se e solo se non sono complanari.

Soluzione Esercizio: Se tre vettori sono complanari, allora almeno uno dei tre è combinazione lineare degli altri due (due vettori bastano per generare tutti quelli in un piano, e se i tre vettori fossero addirittura allineati ne basterebbe solo uno per generare gli altri due).

Se tre vettori non sono indipendenti, uno di loro è generato dagli altri due, quindi sta sul piano che li contiene e i tre vettori sono complanari.

Esercizio 2.5.13

Dire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se i seguenti vettori siano una base per $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0),\ \mathbf{v}_2 = (1, k, 1),\ \mathbf{v}_3 = (3, 1, k-2).$$

Soluzione Esercizio:

Per essere una base di $\mathbb{R}^3$, basta avere che i tre vettori siano linearmente indipendenti (perché $\dim \mathbb{R}^3 = 3$). Vediamolo; sia:

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = a(1, -1, 0) + b(1, k, 1) + c(3, 1, k-2) =$$

$$= (a + b + 3c, -a + kb + c, b + (k-2)c) = (0, 0, 0).$$

Questo ci dà il sistema:

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ -a + kb + c = 0 \\ b + (k-2)c = 0 \end{cases}.$$

che diviene:

$$\begin{cases} b = (2-k)c \\ a = k(2-k)c \\ (k^2 - k - 6))c = 0 \end{cases}.$$

Se $k = 3$ o $k = -2$, la terza equazione diviene 0=0, ed è sempre verificata, quindi il sistema ha infinite soluzioni (con una variabile libera):

$(k(k-2)c, (2-k)c, c)$.

Se $k \neq 3$ e $k \neq -2$, allora la terza equazione dà $c = 0$, da cui l'unica soluzione del sistema è $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Quindi se $k \neq 3$ e $k \neq -2$, la sola combinazione lineare nulla dei tre vettori è quella a coefficienti nulli, quindi essi sono indipendenti e costituiscono una base.

Se invece $k = 3$ o $k = -2$, ci sono infinite combinazioni lineari dei tre vettori che danno il vettore nullo, quindi essi sono linearmente dipendenti (e non una base).

Notiamo che, alla luce dei capitoli successivi, per rispondere basta vedere se la matrice che ha i tre vettori come righe abbia rango 3 oppure no.

Esercizio 2.5.14

Siano $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ e $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ con $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 3, 3, -1)$, $\mathbf{w}_1 = (1, 2, 2, -2)$,

$\mathbf{w}_2 = (2,3,2,-3)$, $\mathbf{w}_3 = (1,3,4,-3)$. Determinare la dimensione di $V+W$.

Soluzione Esercizio:
Si ha che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ è un insieme di generatori per $V+W$; il modo più efficiente di risolvere l'esercizio è quello di scrivere la matrice A che ha come righe i sei vettori; si avrà che $r(A) = \dim(V+W)$. Eseguendo un'eliminazione di Gauss si ottiene che $r(A) = 3$.

Esercizio 2.5.15
Siano $V = \{\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_O^3 \mid |\overrightarrow{\mathbf{v}}| \leq 1\}$ (V è dato dai vettori contenuti in una sfera di centro O e raggio =1). V è un sottospazio di $\mathcal{V}_O^3$? In caso affermativo, determinare la dimensione di V.

Soluzione Esercizio: No, V non è un sottospazio; ad esempio ogni vettore $\mathbf{v}$ con $|\overrightarrow{\mathbf{v}}| = 1$ è in V, ma $2\mathbf{v} \notin V$.

Esercizio 2.5.16
Stabilire se le due seguenti terne di vettori siano linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ e, se lo sono, completarli ad una base di $\mathbb{R}^4$:

- $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-1,0,0)$;
- $\mathbf{w}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{w}_2 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{w}_3 = (0,1,2,1)$.

Soluzione Esercizio:
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ non sono indipendenti, infatti $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ sono indipendenti, infatti $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ lo sono (nessuno dei due è multiplo dell'altro) e non è possibile generare $\mathbf{w}_3$ usando i primi due, che hanno le ultime due coordinate nulle.
Per completare $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ ad una base si può aggiungere ad esempio $\mathbf{w}_4 = (0,0,0,1)$ (è facile vedere che è indipendente dai primi due e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ non generano $\mathbf{w}_3$ avendo la terza coordinata nulla).

Esercizio 2.5.17
Verificare che $\mathbf{v}_1 = (-1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_4 = (1,1,1)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$ ma non è una base.

Soluzione Esercizio: L'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ non può essere una base perché $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, cioè le basi di $\mathbb{R}^3$ hanno 3 elementi.
Vediamo che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un insieme di generatori; è facile notare che:
$(1,0,0) = -\mathbf{v}_1$; $\quad (0,1,0) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \quad$ e $(0,0,1) = \mathbf{v}_3$;
quindi con vettori di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ si può generare la base canonica, e quindi ogni altro vettore, e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ risulta un insieme di generatori.
Alternativamente, si poteva vedere diretamente che con $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ si può generare qualunque vettore verificando che, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ esistono $a, b, c, d \in R$ tali che:
$(x,y,z) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 + d\mathbf{v}_4$.

Esercizio 2.5.18

Trovare un sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ che non sia una base.

Soluzione Esercizio:

Basta considerare la base canonica di $\mathbb{R}^5$ ed aggiungerle un qualsiasi altro vettore di $\mathbb{R}^5$.

Esercizi 2.5.19 e 2.5.20 La soluzione di questi esercizi è presente sul testo cartaceo.

Esercizio 2.5.21

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - ky = z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t + y = kx + z = 0\}$ dove k è un parametro reale. Dopo aver scritto una base per V ed una base per W, determinare i valori di k per cui risulta $W + V = \mathbb{R}^4$.

Soluzione Esercizio:

Si ha:

$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - ky = z = 0\} = \{(ky, y, 0, t)\}$, e

$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t + y = kx + z = 0\} = \{(x, y, -kx, -y)\}$.

Una base di V è : $\{(k, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$; una di W è : $\{(1, 0, -k, 0), (0, 1, 0, -1)\}$; quindi l'unione delle due basi è un sistema di generatori per $V + W$, se sono linearmente indipendenti, essendo 4, genereranno tutto $\mathbb{R}^4$ e quindi $V + W = \mathbb{R}^4$. Consideriamo il sistema (in a, b, c, d):

$a(k, 1, 0, 0) + b(0, 0, 0, 1) + c(1, 0, -k, 0) + d(0, 1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0)$, che dà :

$$\begin{cases} ak + c = 0 \\ a + d = 0 \\ -kc = 0 \\ b - d = 0 \end{cases}$$

Se $k \neq 0$, il sistema ha solo la soluzione nulla, quindi i quattro vettori sono indipendenti e $V + W = \mathbb{R}^4$. Se invece $k = 0$, il sistema ha infinite soluzioni: $(a, b, c, d) = (-d, d, 0, d)$ e $V + W \neq \mathbb{R}^4$.

Notiamo che alla luce dei contenuti degli altri capitoli, il problema poteva essere risolto tramite lo studio del rango della matrice avente i quattro vettori come righe (con una eliminazione di Gauss o calcolando il determinante).

Esercizio 2.5.22 La soluzione di questo esercizio è presente sul testo cartaceo.

Esercizio 2.5.23

Il sottoinsieme

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] |\ p(x) \text{ sia divisibile per } x\} \ \subset \ \mathbb{R}[x]$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$?

Soluzione Esercizio: Si ha che il polinomio nullo appartiene a V, e se $p_1, p_2 \in V$, allora anche $ap_1+bp_2 \in V$, percheé se p_1, p_2 sono divisibili per x, allora ogni loro combinazione lineare lo è . Quindi V è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 2.5.24
Trovare una base del sottospazio $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Soluzione Esercizio:
Si ha $S = \{(x, -x, z)\}$; una sua base è : $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Esercizio 2.5.25 La soluzione di questo esercizio è presente sul testo cartaceo.

Esercizio 2.5.26
Trovare una base del sottospazio $S + S' \subset \mathbb{R}^4$, dove
$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0\}$ ed $S' = T \cap T'$, ove

$$T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z = 0\} \ , \ T' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}.$$

Soluzione Esercizio: Avremo: $S = \{(x, x, z, t)\}$, ed una sua base è : $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
Inoltre: $S' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2z = 0,\ y-z = 0\} = \{(2z, z, z, t)\}$, ed una sua base è : $\{(2, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
L'unione delle due basi dà un sistema di generatori per $S + S'$:
$\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (2, 1, 1, 0)\}$
Se i quattro vettori sono indipendenti risulteranno una base per $S + S'$; in effetti è facile notare che
$(1, 0, 0, 0) = (2, 1, 1, 0)-(0, 0, 1, 0)-(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 0) = 2(1, 1, 0, 0)-(2, 1, 1, 0) + (0, 0, 1, 0)$;
quindi con i quattro vettori si può generare la base canonica, cioè essi generano $\mathbb{R}^4 = S + S'$ e ne sono una base.
Notiamo che alternativamente, bastava dimostrare che la matrice avente i quattro vettori come righe aveva rango 4.

Esercizio 2.5.27
Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (z, y, x)\}$.

- Dimostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$;
- Determinare una base di S;
- Determinare le coordinate del vettore $(7, 2, 7)$ rispetto alla base di S scelta nel punto precedente.

Soluzione Esercizio:
Si ha: $S = \{(x, y, x)\}$: notiamo che $(0, 0, 0) \in S$ e che se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in S$, con $\mathbf{w}_1 = (a, b, a)$ e $\mathbf{w}_2 = (c.d.c)$, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d, \alpha a + \beta c) \in S.$
quindi S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Una sua base è : $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1,0,1),(0,1,0)\}$.

Rispetto alla base data, si ha: $(7,2,7) = 7\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, quindi le coordinate del vettore rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(7,2)_{\mathcal{B}}$.

Esercizio 2.5.28 Fare un esempio di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che abbia dimensione 2 e che contenga il vettore $(2,-1,1)$.

Soluzione Esercizio: Possiamo considerare per esempio il sottospazio $W = \langle(2,-1,1),(1,0,0)\rangle \subset \mathbb{R}^3$, questo avrà dimensione 2 (i due vettori ne sono una base). Un ulteriore esempio può essere lo spazio:
$W' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}$.

Esercizio 2.5.29 Fare un esempio di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che abbia dimensione 2 e che contenga il vettore $(2,-1,1,0)$.

Soluzione Esercizio: Possiamo considerare per esempio il sottospazio $W = \langle(2,-1,1,0),(1,0,0,0)\rangle \subset \mathbb{R}^4$, questo avrà dimensione 2 (i due vettori ne sono una base). Un ulteriore esempio può essere lo spazio:
$W' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + z = 0,\ t = 0\}$.

Esercizio 2.5.30 Avvertenza: Per svolgere questo esercizio bisogna conoscere il contenuto del Capitolo 3 (matrici).

Sia $V = \mathbb{R}^{3,3}$. Siano S il sottoinsieme delle matrici simmetriche in V e S' il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche di V (una matrice A è simmetrica se $A = {}^tA$ e antisimmetrica se $A = -({}^tA)$). Verificare che S e S' sono sottospazi di V e dimostrare che $S \oplus S' = V$.

Suggerimento. Per la seconda domanda, utilizzare la formula di Grassmann.

Soluzione Esercizio: Si verifica immediatamente che la matrice nulla $O \in \mathbb{R}^{3,3}$ appartiene sia a S che a S', inoltre è abbastanza immediato che se A e B sono matrici simmetriche, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, anche $\alpha A + \beta B$ lo è , e la stessa cosa vale per le antisimmetriche, quindi S e S' sono sottospazi.

Abbiamo poi che $S \cap S' = \{O\}$, in quanto una matrice A antisimmetrica ha gli elementi sulla diagonale tutti nulli (verificano $a_{ii} = -a_{ii}$), e se A è contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica, per $i \neq j$ avremo $a_{i,j} = -a_{i,j}$, quindi anche gli altri elementi sono tutti nulli.

Abbiamo inoltre che $\dim S = 6$, mentre $\dim S' = 3$ (in quanto le matrici in S hanno la forma: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, con 6 variabili libere, mentre quelle in S' sono del tipo: $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, con 3 variabili libere.

Si avrà , per la formula di Grassmann:
$\dim S \oplus S' = 6 + 3 = 9 = \dim \mathbb{R}^{3,3}$.
quindi $S \oplus S' = \mathbb{R}^{3,3}$.

Esercizio 2.5.31 Dare un esempio di spazio vettoriale che non sia un $\mathbb{R}^n$ e abbia dimensione ≥ 4.

Soluzione Esercizio: Ad esempio:
$W = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 |\ x + y + z + u + v = 0\}$.

Esercizio 2.5.32 Dire, al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, se $\mathbb{R}^n$ sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+2}$.

Soluzione Esercizio: No, $\mathbb{R}^n$ non è nemmeno un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+2}$, il primo ha come elementi n-uple di numeri reali, mentre quelli del secondo sono $(n + 2)$-uple.

Esercizio 2.5.33 Dare un esempio di un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ che abbia dimensione d, con $1 \leq d \leq 3$.

Soluzione Esercizio: Ad esempio:
Con $d = 1$. $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0,\ y = 0,\ z = 0\}$.
Con $d = 2$. $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0,\ y = 0\}$.
Con $d = 3$. $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0\}$.

Esercizio 2.5.34 Dimostrare che per un sottospazio vettoriale $W \subset V$ che abbia dimensione pari alla $\dim V$, si ha necessariamente che $W = V$.

Soluzione Esercizio: Sia $\dim V = n = \dim W$. Allora scelta una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ di W, essa è fatta di n vettori linearmente indipendenti di V, quindi è anche una base di V, e quindi $V = W$.

Esercizio 2.5.35 Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ e dire se sono dei sottospazi:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$,
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y = 0\}$,
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y - 2 = 0\}$.

Soluzione Esercizio:

1. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$ è un sottospazio in quanto $(0, 0)$ vi appartiene e il vettore generico di questo spazio ha coordinate $v = (x, -x)$ e chiaramente ogni combinazione lineare di elementi di questo tipo rimane nel sottoinsieme. Per la rappresentazione grafica si veda Figura 2.1.

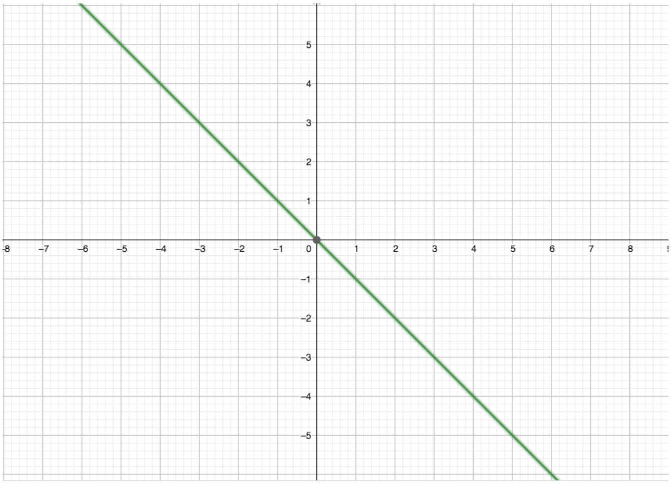

Figura 2.1: Esercizio 2.5.35.1. Rappresentazione grafica dell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$.

2. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y = 0\}$ non è un sottospazio infatti ad esempio $(1, -1)$ appartiene al sottoinsieme, mentre $(-1, 1) = -(1, -1)$ non vi appartiene. Come si vede bene dalla rappresentazione grafica di Figura 2.2 non si tratta di uno spazio lineare.

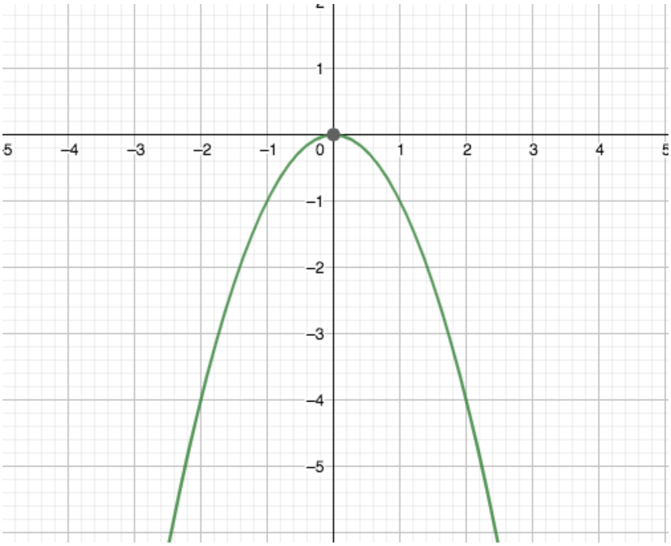

Figura 2.2: Esercizio 2.5.35.2. Rappresentazione grafica dell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y = 0\}$.

3. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y - 2 = 0\}$ non è un sottospazio in

quanto ad esempio $(0,0)$ non vi appartiene. Come si vede bene dalla rappresentazione grafica di Figura 2.3, l'insieme in questione non passa per l'origine.

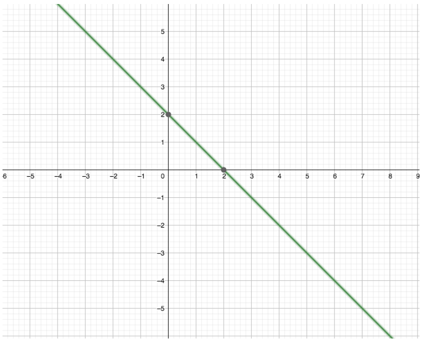

Figura 2.3: Esercizio 2.5.35.3. Rappresentazione grafica dell'insieme$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x+y-2=0\}$.

Esercizio 2.5.36 Mostrare con un esempio grafico in $\mathbb{R}^2$ che l'unione di due sottospazi non è un sottospazio a meno che l'uno non sia contenuto nell'altro.

Soluzione Esercizio: In Figura 2.4 si possono vedere il sottospazio $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x+2y=0\}$ e il sottospazio $s=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x-y=0\}$. Chiaramente la loro unione consiste nell'insieme costituito dai vettori che giacciono o sulla retta r o sulla retta s. Se l'unione fosse un sottospazio, si avrebbe che comunque presi un vettore di r e un vettore di s, la loro combinazione lineare rimarrebbe nel sottospazio, ossia sarebbe ancora un vettore o di r o di s. Ma ciò non si verifica, infatti $(O,C)=(-2,1)\in r$, $(O,B)=(2,2)\in s$ mentre $(OD)=(O,C)+(O,B)=(0,3)\notin r\cup s$.

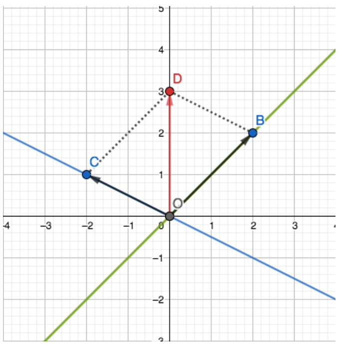

Figura 2.4: Esercizio 2.5.36. Esempio di unione di due sottospazi in $\mathbb{R}^2$ che non è un sottospazio.

Gli unici esempi in $\mathbb{R}^2$ di sottospazi l'uno contenuto nell'altro possono essere fatti

- o con due rette per l'origine (che per essere contenuta l'una nell'altra devono essere la stessa retta); in tal caso è evidente che l'unione di due rette uguali passanti per l'origine sono la stessa retta passante ancora per l'origine e quindi un sottospazio;
- oppure con una retta per l'origine e uno dei due sottospazi banali, o $\{(0,0)\}$ o $\mathbb{R}^2$:
  - se uniamo una retta per l'origine con l'origine stessa, l'insieme unione è la retta data, quindi è un sottospazio;
  - se uniamo una retta per l'origine con $\mathbb{R}^2$, l'insieme unione è $\mathbb{R}^2$ quindi è un sottospazio.

Esercizio 2.5.37 Mostrare con un esempio grafico in $\mathbb{R}^3$ che l'unione di due sottospazi non è un sottospazio a meno che l'uno non sia contenuto nell'altro.

Soluzione Esercizio: La Figura 2.5 mostra i seguenti due sottospazi:
un piano $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0\}$
ed una retta $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = x - y = 0\}$.
Essi non sono l'uno contenuto nell'altro.
Il vettore $(O,B) = (-2,-2,4) \in r$ e il vettore $(O,C) = (3,3,0) \in \pi$ mentre il vettore $(O,A) = (1,1,4) = (O,B) + (O,C)$ non appartiene né a r né a π quindi nemmeno alla loro unione, dunque $r \cup \pi$ non è un sottospazio.

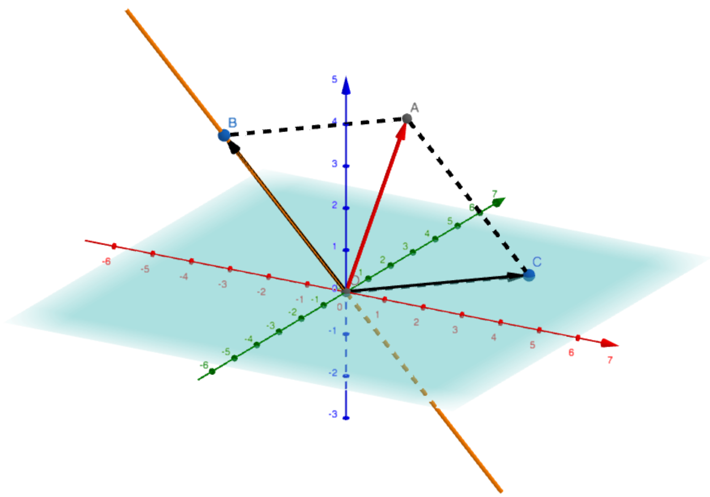

Figura 2.5: Esercizio 2.5.37. Esempio di unione di due sottospazi in $\mathbb{R}^3$ la cui unione non è un sottospazio.

In Figura 2.6 sono rappresentati i seguenti sottospazi $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0\}$ e $r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x - y = 0\}$. Chiaramente la retta r è contenuta nel piano π, quindi $\pi \cup r = \pi$, perciò essendo π un sottospazio si ha che l'unione di questi due due sottospazi resta un sottopazio.

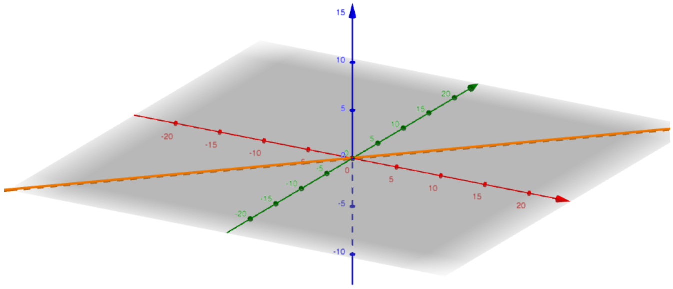

Figura 2.6: Esercizio 2.5.37. Esempio di unione di due sottospazi in $\mathbb{R}^3$ l'uno contenuto nell'altro la cui unione resta un sottospazio.

Esercizio 2.5.38 Mostrare con un esempio grafico in $\mathbb{R}^2$ che la somma di due sottospazi è un sottospazio.

Soluzione Esercizio: In Figura 2.7 si sono rappresentati i sottospazi $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 5y = 0\}$ e $s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y = 0\}$. La loro somma è costituita da tutti i vettori che si possono ottenere sommando un vettore qualunque di r con un vettore qualunque di s In Figura 2.7 abbiamo scelto di rappresentare la somma del vettore $(O, B) = (-5, 1) \in r$ col vettore $(O, C) = (2, 2) \in s$ e si è ottenuto il vettore $(O, A) = (-3, 3)$, è anche visivamente chiaro che facendo la somma tra tutti i vettori di r con tutti i vettori di s si riesce a spazzare tutto il piano (si rimanda alla teoria per una dimostrazione rigorosa di questo fatto in generale).

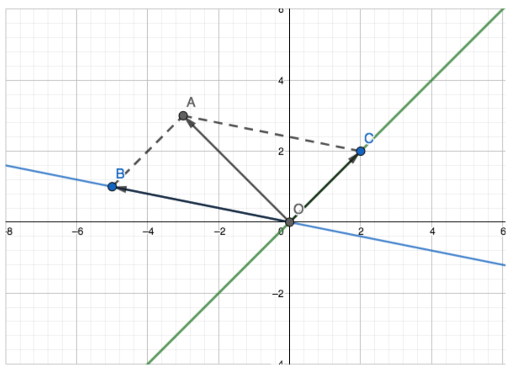

Figura 2.7: Esercizio 2.5.38. La somma di due sottospazi in $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio.

Esercizio 2.5.39 Mostrare con un esempio grafico in $\mathbb{R}^3$ che la somma di due sottospazi è un sottospazio.

Soluzione Esercizio: In Figura 2.8 si sono rappresentati i sottospazi $r = \langle(0,8,0)\rangle$ e $s = \langle(-15,8,-7)\rangle$. La loro somma è costituita da tutti i vettori che si possono ottenere sommando un vettore qualunque di r con un vettore qualunque di s In Figura 2.8 abbiamo scelto di rappresentare la somma del vettore $(O,D) = (0,0,3) \in r$ col vettore $(O,A) = (6,-3.2,2.8) \in s$ e si è ottenuto il vettore $(O,P) = (-6,-0.2,5.8)$ che appartiene al piano $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-z=0\}$. Chiaramente $\pi = r+s$ e che facendo la somma tra tutti i vettori di r con tutti i vettori di s si riesce a spazzare tutto il piano π (si rimanda alla teoria per una dimostrazione rigorosa di questo fatto in generale).

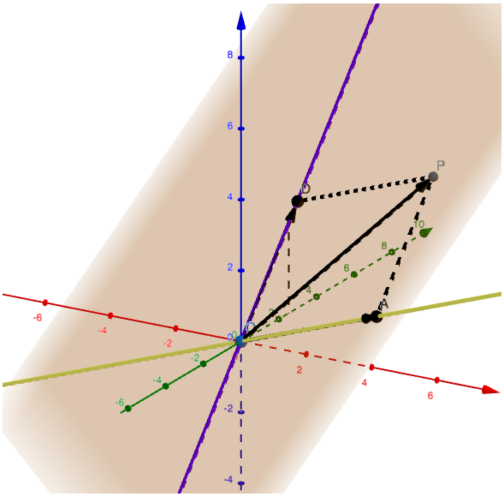

Figura 2.8: Esercizio 2.5.39. La somma di due sottospazi in $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio: $\pi = r+s$.

Esercizio 2.5.40 Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ e dire se sono dei sottospazi[1]:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-2z=0\}$,
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-2z=0=x\}$,
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+3z^3=0\}$,
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-5=0\}$,
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-1=0=x-y+z\}$.

[1] Nel testo cartaceo ci sono alcuni errori di stampa: gli insiemi in questione sono tutti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ e non di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione Esercizio:

1. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - 2z = 0\}$ è il piano azzurro rappresentato in Figura 2.9. Esso è un piano passante per l'origine quindi è un sottospazio.

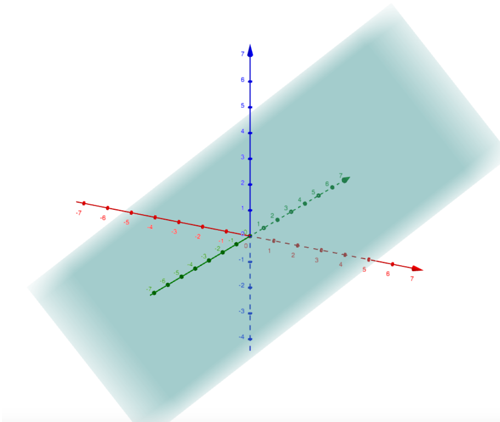

Figura 2.9: Rappresentazione grafica dell'Esercizio 2.5.40.1.

2. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - 2z = 0 = x\}$ è la retta arancione rappresentata in Figura 2.10. Essa è una retta passante per l'origine, quindi è un sottospazio.

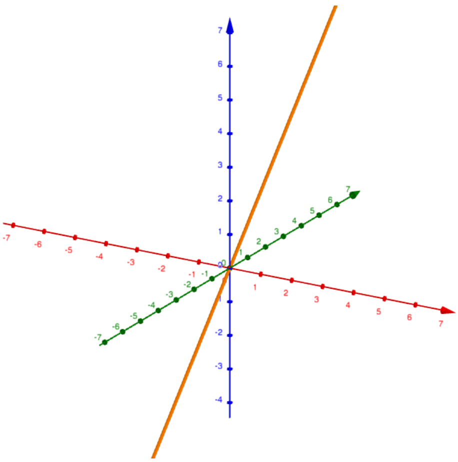

Figura 2.10: Rappresentazione grafica dell'Esercizio 2.5.40.2.

3. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+3z^3=0\}$ è rappresentato in Figura 2.11, esso non è un sottospazio (si vede chiaramente che non è lineare, ovviamente questa non è una dimostrazione).

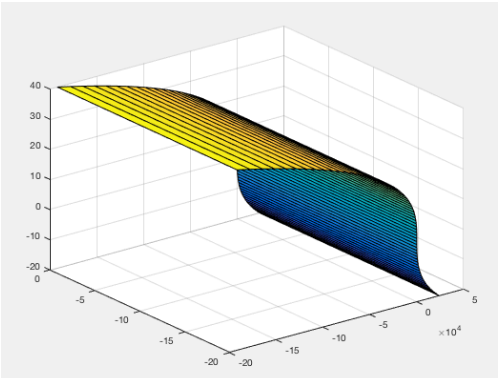

Figura 2.11: Rappresentazione grafica dell'Esercizio 2.5.40.3.

4. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-5=0\}$ è il piano azzurro rappresentato in Figura 2.12 che non passando per l'origine non è un sottospazio.

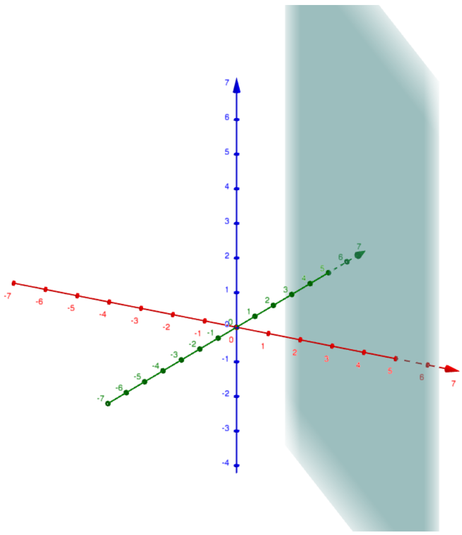

Figura 2.12: Rappresentazione grafica dell'Esercizio 2.5.40.4.

5. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-1 = 0 = x-y+z\}$ è la retta arancione rappresentata in Figura 2.13 che non passando per l'origine non è un sottospazio.

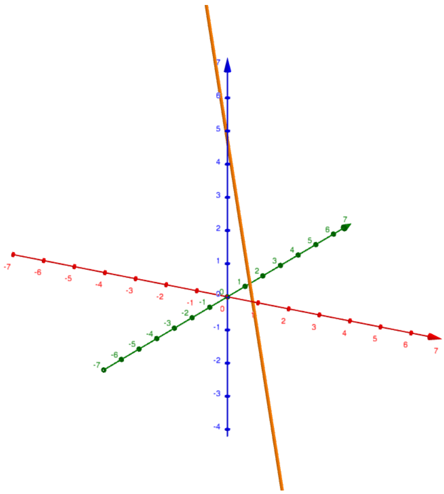

Figura 2.13: Rappresentazione grafica dell'Esercizio 2.5.40.5.