Capitolo 3

Le Matrici

Soluzioni Esercizi

Esercizio 3.5.1 Eseguire i seguenti prodotti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix}.$$

Soluzione Esercizio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1+2 \\ 3-4 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.5.2 Eseguire i seguenti prodotti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione Esercizio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+0 & -1+2-1 \\ 0-1+0 & 0+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2-1 & -1-4 \\ -1 & -2+1 & 1+4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.5.3 Siano date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eseguire i prodotti AB e BA se possibile

Soluzione Esercizio: Abbiamo che $A \in \mathbb{R}^{1,3}$, mentre $B \in \mathbb{R}^{3,1}$; quindi:

$$AB = (1\cdot1+0\cdot2+(-1)\cdot(-2) = (3) \in \mathbb{R}^{1,1}; \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.5.4 Quali condizioni devono soddisfare le matrici A, B, C affinché il seguente prodotto sia eseguibile: $A(BC)$?

Soluzione Esercizio: Siano: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{s,t}$ e $C \in \mathbb{R}^{u,v}$. Perché si possa fare il prodotto BC, dovremo avere $t = u$, e si avrà che $BC \in \mathbb{R}^{s,v}$. Per poter eseguire il prodotto $A(BC)$, dovrà quindi essere $n = s$.

Esercizio 3.5.5 Dal terzo prodotto dell'Esercizio 3.5.1, si può dedurre che ogni matrice simmetrica in $\mathbb{R}^{2,2}$ è invertibile?

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 3.5.6 Risolvere la seguente equazione matriciale: $AX = B$, cioè determinare la matrice incognita X che verifica l'uguaglianza, ove:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,1};\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}.$$

Soluzione Esercizio: Il sistema $AX = B$ equivale a $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ora $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 2x+y \\ x+7y \end{pmatrix}$, quindi l'equazione iniziale diventa $\begin{pmatrix} 3x+y \\ 2x+y \\ x+7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Abbiamo due matrici di $\mathbb{R}^{3,1}$ che devono essere uguali, perciò dovranno essere uguali le entrate delle posizioni corrispondenti, ossia dovranno verificarsi tutte e tre le seguenti equazioni: $3x + y = 2, 2x + y = 1, x + 7y = 6$. Il che equivale a risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + y = 1 \\ x + 7y = 6 \end{cases}.$$

Dalle prime due equazioni si ricava semplicemente che $x = 1$ e $y = -1$, ma questi due valori non sono compatibili con la terza equazione. Quindi non esistono valori di x e di y che risolvano l'equazione data.

Esercizio 3.5.7 Dimostrare che ogni matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ che sia invertibile e tale che $A^2 = I$, deve essere uguale alla propria inversa.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 3.5.8 Verificare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ è soluzione dell'equazione matriciale $A^2 - A - 8I = O$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 3.5.9 Siano $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$. Verificare che da $AB = O$ e $BA = O$ non si può dedurre che $AB = BA$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 3.5.10 Stabilire se esistono valori del parametro reale k tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sia idempotente (cioè che valga $A^2 = A$).

Soluzione Esercizio: Controlliamo nel nostro caso:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k \\ k & 0 & k^2 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e questa è uguale a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se e solo se $k = 0$. Dunque $A^2 = A$, cioè A è idempotente, se e solo se $k = 0$.

Esercizio 3.5.11 Verificare che se $AB = A$ e $BA = B$ allora A è idempotente.

Soluzione Esercizio:
Dobbiamo provare che $A^2 = A$. Scriviamo $A^2 = AA$ che per la prima ipotesi è $AA = (AB)A$, per la proprietà associativa $(AB)A = A(BA)$. Ora per la seconda ipotesi $A(BA) = AB$. Infine $AB = A$.
Mettiamo assieme tutto: $A^2 = AA = (AB)A = A(BA) = AB = A$.

Esercizio 3.5.12 Dimostrare che se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ allora $A+{}^tA$ è una matrice simmetrica.

Soluzione Esercizio: Sia $B = A + {}^tA$. $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} + (a_{j,i})_{i,j=1,\dots,n} = (a_{i,j} + a_{ji})$. Quindi $b_{i,j} = a_{i,j} + a_{j,i}$ e $b_{j,i} = a_{j,i} + a_{i,j}$. Dunque $b_{i,j} = b_{j,i}$.

Esercizio 3.5.13 Considerare l'insieme $\mathcal{T}^a_{n,n}$ delle matrici triangolari alte in $\mathbb{R}^{n,n}$ e quello $\mathcal{D}_{n,n}$, delle matrici diagonali in $\mathbb{R}^{n,n}$. Dimostrare che $(\mathcal{T}^a_{n,n}, +, \cdot)$ e $(\mathcal{D}_{n,n}, +, \cdot)$ sono anelli, e il secondo è commutativo.

Soluzione Esercizio: Per dimostrare che sono gruppi commutativi rispetto alla somma basta provare che sono entrambi chiusi rispetto all'operazione di somma e prodotto per scalari, dopodiché le proprietà della struttura di gruppo commutativo rispetto alla somma seguono dal fatto che $(\mathbb{R}^{n,n}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo rispetto alla somma.

Verifichiamo che $\mathcal{T}^a_{n,n}$ sia chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalari. Una matrice reale quadrata $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ appartiene a $\mathcal{T}^a_{n,n}$ se $a_{i,j} = 0 \,\forall\, i > j$. La somma di due matrici si fa sommando le entrate corrispondenti, quindi se sommiamo due matrici di $\mathcal{T}^a_{n,n}$ tra loro esse avranno tutti gli elementi sotto la diagonale nulli e nella matrice somma non sarà possibile avere elementi sotto la diagonale diversi da zero. Analogamente la moltiplicazione per scalari: siano $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a_{i,j}) \in \mathcal{T}^a_{n,n}$, abbiamo $\alpha(a_{i,j}) = (\alpha a_{i,j})$, $\forall\, i, j = 1, \dots, n$. Quindi se $a_{i,j} = 0$ per $i > j$ anche $\alpha a_{i,j} = 0$ per $i > j$.

La prova che $\mathcal{D}_{n,n}$ è chiuso rispetto alla somma di matrici e alla moltiplicazione per scalari è analoga a quella di $\mathcal{T}^a_{n,n}$ solo che gli elementi nulli nella matrice saranno tutti quelli con $i \neq j$.

Ora controlliamo le altre proprietà dell'essere un anello.

L'elemento neutro del prodotto tra matrici è la matrice identità che appartiene sia a $\mathcal{T}^a_{n,n}$ che a $(\mathcal{D}_{n,n}, +, \cdot)$.

Ora per controllare le altre due proprietà dell'essere un anello basta di nuovo verificare che sia $\mathcal{T}^a_{n,n}$ che $(\mathcal{D}_{n,n}, +, \cdot)$ siano chiuse rispetto al prodotto tra matrici.
Siano $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ e $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ due matrici triangolari, quindi con $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ nulli se $i > j$. Sia poi $C = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = AB$. L'elemento $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}$, quindi ogni volta che $i > j$ si ha che $a_{1,i}, \dots, a_{i-1,i} = 0$ ed inoltre che $b_{i,j}, \dots, b_{n,j} = 0$ dunque $c_{i,j} = 0$ per ogni $i > j$.

Per provare che le matrici diagonali sono chiuse rispetto al prodotto di matrici basta ripetere questo ragionamento appena fatto con $i < j$.

Ora resta da controllare che $\mathcal{D}_{n,n}$ sia commutativo. Siano $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ e $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ due matrici diagonali, quindi con $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ nulli se $i \neq j$. Sia poi $C = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = AB$. Di nuovo $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}$. Essendo A, B diagonali si ha che $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ ogni volta che $i \neq j$. Quindi $c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$. Ora $a_{i,j}b_{i,j} = b_{i,j}a_{i,j}$ in quanto prodotto per scalari. Perciò $AB = C = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = (a_{i,j}b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = (b_{i,j}a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = BA$.

Esercizio 3.5.14 Supponiamo di voler acquistare n diversi tipi di merci, diciamo b_j, $j = 1, \dots, n$ unità di ciascuna di esse. Abbiamo a disposizione m negozi ove effettuare l'acquisto, e sia a_{ij} il prezzo unitario della j-esima merce effettuato nell'i-esimo negozio. Con quale operazione matriciale possiamo ottenere i costi totali $c_1, \dots, c_m$ della nostra spesa a seconda del negozio scelto?

Osserviamo che il minimo tra i c_i ci dirà in quale negozio sia più conveniente effettuare l'acquisto.

Soluzione Esercizio: L'operazione matriciale da impostare è la seguente:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.5.15 * Un giardiniere di Keukenhof deve programmare le aiuole di tulipani per l'anno venturo. Ha deciso di combinare tre specie diverse a, b, c di tulipani nella medesima aiuola. Della specie a possiede in magazzino x_a bulbi, della specie b ne possiede x_b e della specie c, x_c. Di tutte e tre le specie ne aveva seppelliti y_a, y_b, y_c l'anno precedente, esse a fine stagione daranno approssimativamente $2y_a, 6y_b, 8y_c$ bulbi ciascuna. Supponiamo che il giardiniere voglia utilizzare $2/3$ dei bulbi in magazzino e $1/4$ dei bulbi che avrà a fine stagione. Supponiamo inoltre che le proporzioni con cui voglia utilizzare i bulbi a, b, c siano l'una il doppio dell'altra (ossia i bulbi c il doppio dei bulbi b, e i bulbi b il doppio dei bulbi a). Quale operazione matriciale deve impostare il giardiniere per sapere quanti bulbi dovrà usare l'anno prossimo per ciascuna specie?

Soluzione Esercizio: Se z_a, z_b, z_c sono le quantità di bulbi cercate allora

$$\begin{pmatrix} z_a & z_b & z_c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[(2/3) \begin{pmatrix} x_a & 0 & 0 \\ 0 & x_b & 0 \\ 0 & 0 & x_c \end{pmatrix} + (1/4) \begin{pmatrix} 2y_a & 0 & 0 \\ 0 & 6y_b & 0 \\ 0 & 0 & 8y_c \end{pmatrix} \right].$$

Esercizio 3.5.16 Considerare l'insieme di generatori $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{2,3}$ che appare nell'Esempio 3.2.1 e dimostrare che è una base.

Soluzione Esercizio: Nell'esempio 3.2.1 si dimostra che

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\};$$

ove E_{ij} è la matrice avente tutti gli elementi nulli tranne $a_{ij} = 1$, è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^{2,3}$. Rimane quindi da verificare che gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo la combinazione lineare:

$$a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{23}E_{23} = O$$

avremo:

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

e quindi ogni $a_{ij} = 0$, e gli E_{ij} risultano linearmente indipendenti e, quindi, una base.

Esercizio 3.5.17 In generale, qual è la dimensione dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{m,n}$?

Soluzione Esercizio: Procedendo come nell'esercizio precedente, si può dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{m1}, E_{m2}, \ldots, E_{mn}\}$$

è una base per $\mathbb{R}^{m,n}$, che quindi ha dimensione mn.

Esercizio 3.5.18 Stabilire se una delle seguenti matrici può essere scritta come combinazione lineare delle altre due: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione Esercizio: L'uguaglianza che vorremmo essere verificata è la seguate: $\alpha A + \beta B = \gamma C$. Quindi $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 2\alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ 2\alpha & \alpha+2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\gamma & \gamma \\ 8\gamma & \gamma \end{pmatrix}$. Affinché C sia una combinazione lineare di A e B occorre che le due matrici dell'ultima uguaglianza siano uguali termine a termine. Osservando gli elementi di posto $(2,1)$ ed $(1,2)$ si vede che in un caso $\alpha = \gamma$ e nell'altro $\alpha = 4\gamma$. Cosa che sarebbe possibile solo se $\alpha = \gamma = 0$. Ma questo vorrebbe dire che $\beta B = 0$. Essendo $B \neq 0$ si ha che anche $\beta = 0$. Quindi, essendo $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$ l'unica soluzione possibile del sistema, significa che A, B e C non possono essere l'una combinazione lineare delle altre.

Esercizio 3.5.19 Considerare lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^{2,3}, +, \cdot)$ e trovarne una base. Più in generale, qual è la dimensione dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{m,n}$?

Soluzione Esercizio: Ad esempio una base di $(\mathbb{R}^{2,3},+,\cdot)$ è

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Quindi la dimensione di $(\mathbb{R}^{m,n},+,\cdot)$ è mn.

Esercizio 3.5.20 Date le matrici quadrate A e B dello stesso ordine, è vero che $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$?

Soluzione Esercizio: Svolgiamo il prodotto $(A-B)(A+B) = AA+AB-BA-BB$. Quindi visto che il prodotto tra matrici in generale non è commutativo in generale non è vero $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

Esercizio 3.5.21 Siano

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare: $2A-B$, $3A+2B-4C$, $-2A+B+2C-2B$,
$3B+2(2A-C)-(A+B+2C)$.

Risolvere, se possibile:
$3X+2(A-X)+B+2(C+2X)=0$,
$4A+2(B+2X)-3(C+X+2A)=0$,
$4(A+B+X)+4(-A-B+X)-4(A-B+X)=0$.

Soluzione Esercizio:

- $2A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,
- $3A+2B-4C=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$,
- $-2A+B+2C-2B=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$,
- $3B+2(2A-C)-(A+B+2C)=\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.
- $3X+2(A-X)+B+2(C+2X)=0 \Rightarrow X=-2/5A-1/5B-2/5C$,
- $4A+2(B+2X)-3(C+X+2A)=0 \Rightarrow X=2A-2B+3C$,
- $4(A+B+X)+4(-A-B+X)-4(A-B+X)=0 \Rightarrow x=A-B$.

Esercizio 3.5.22 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare, quando possibile: AB, AC, BA, BC, $({}^tA)B$, $({}^tC)A$.

Soluzione Esercizio:

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- AC, BA e $({}^tC)A$ non sono possibile in quanto il numero delle colonne della matrice di sinistra non coincide col numero delle righe della matrice di destra.
- $BC = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $({}^tA)B$ è uguale ad AB in quanto A è una matrice simmetrica.

Esercizio 3.5.23 Calcolare, se possibile, i seguenti prodotti: AB e BA dove: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Soluzione Esercizio:

- $AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$,
- $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 22 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.5.24 Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Verificare che $A(BC) = (AB)C$.

Soluzione Esercizio: In entrambi i casi otteniamo $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.5.25 Mostrare che due matrici quadrate diagonali dello stesso ordine commutano sempre, ossia per ogni $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ con $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ si ha che $AB = BA$.

Soluzione Esercizio: Si ha che $AB = C$, con $c_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ e $c_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$ e, analogamente, $BA = D$, con $d_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ e $d_{i,i} = b_{i,i}a_{i,i}$. Quindi $C = D$.

Esercizio 3.5.26 Sia $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ tutti distinti. Determinare tutte le matrici reali B, 3×3, che commutano con A, ossia, tali che $AB = BA$.

Soluzione Esercizio: Osserviamo innanzitutto che per computer con A deve essere una matrice 3×3, sia dunque $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ la matrice cercata.
Abbiamo che

$$AB = \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & ax_3 \\ by_1 & by_2 & by_3 \\ cz_1 & cz_2 & cz_3 \end{pmatrix}$$

mentre

$$BA = \begin{pmatrix} ax_1 & bx_2 & cx_3 \\ ay_1 & by_2 & cy_3 \\ az_1 & bz_2 & cz_3 \end{pmatrix}.$$

L'unica possibilità affinché le due matrici siano uguali con a, b, c tutti distinti è $x_2 = x_3 = y_3 = y_1 = z_1 = z_2 = 0$. Dunque la matrice cercata sarà della forma: $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}$. Dunque a commutare con la matrice data sono tutte le matrici diagonali.

Esercizio 3.5.27 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e sia B una matrice tale che $AB = BA$. Dimostrare che esistono $h, k \in \mathbb{R}$ tale che $B = hI + \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione Esercizio: La matrice B per commutare con A deve essere una 2×2. Sia $B = \begin{pmatrix} h & k \\ m & n \end{pmatrix}$. Ora $AB = \begin{pmatrix} h+m & k+n \\ m & n \end{pmatrix}$, mentre $BA = \begin{pmatrix} h & h+k \\ m & m+n \end{pmatrix}$. Dunque affinché $AB = BA$ deve essere verificato il seguente sistema

$$\begin{cases} h + m = h \\ k + n = h + k \\ m = m \\ m + n = n \end{cases}.$$

Ora dalla prima equazione ricaviamo che $m = 0$ e dalla seconda che $n = h$, mentre la terza è ininfluente, e l'ultima avendo già posto $m = 0$ è anch'essa ininfluente. Quindi B è della forma $\begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix}$ come richiesto.

Esercizio 3.5.28 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Calcolare A^n per ogni numero naturale n.

Soluzione Esercizio:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{1,1,n} & a_{1,2,n} & a_{1,3,n} \\ a_{2,1,n} & a_{2,2,n} & a_{2,3,n} \\ a_{3,1,n} & a_{3,2,n} & a_{3,3,n} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che gli elementi $a_{i,i,n}$ con $i = 1, 2, 3$ sono uguali ad 1 per ogni n in quanto $a_{i,i,n}$ si ottiene moltiplicando la riga i-esima della matrice A^{n-1} per la colonna i-esima della matrice A. Ora, comunque sia fatta la matrice A^{n-1}, la colonna i-esima della matrice A sarà o $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se $i = 1$, o $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se $i = 2$, oppure $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se $i = 3$. Ora per ogni $i = 1, 2, 3$ si avrà che $a_{i,i,n} = a_{i,i,n-1}$, ed essendo $a_{i,i,1} = 1$ si avrà sempre che $a_{i,i,n} = 1$. Quindi gli elementi sulla diagonali di A^n sono tutti 1.
Analogamente si può vedere che elementi fuori dalla diagonale diversi da $a_{1,3,n}$ son tutti nulli.
Consideriamo ora $a_{1,3,n}$, esso è il prodotto tra la prima riga di A^{n-1} per la terza colonna di A dunque $a_{1,1,n-1} \cdot a + a_{1,2,n-1} \cdot 0 + a_{1,3,n-1} \cdot 1$.
Abbiamo poco fa dimostrato che $a_{1,1,i} = 1$ per ogni i quindi

$$a_{1,3,n} = a + a_{1,3,n-1}. \tag{3.1}$$

Quindi $a_{1,3,2} = 2a$, $a_{1,3,3} = 3a$ e cosí via. Per avere una dimostrazione rigorosa del fatto che $a_{1,3,n} = na$ possiamo procedere per induzione. Il passo $n = 1$ è ovvio. Supponiamo che $a_{1,3,n-1} = (n-1)a$ e da (3.1) si deduce banalmente che $a_{1,3,n} = na$.

Esercizio 3.5.29 Dimostrare che se $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ è una matrice che commuta con ogni matrice $B \in \mathbb{R}^{3,3}$, allora necessariamente A è un multiplo dell'identità.

Soluzione Esercizio: Sia $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ la matrice cercata e sia $B = (b_{i,j})_{i,j=1,2,3}$. L'ipotesi è $AB = BA$ per ogni $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ e quindi per ogni $b_{i,j} \in \mathbb{R}$ con $i, j = 1, 2, 3$. Se svolgiamo i due prodotti troviamo che $AB = (\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj})_{i,j=1,2,3}$ mentre $BA = (\sum_{k=1}^{3} b_{ik} a_{kj})_{i,j=1,2,3}$. Uguagliando termine a termine troviamo che $a_{ik} b_{kj} = b_{ik} a_{kj}$ per ogni $b_{i,j}$, $\forall\, i, k, j = 1, 2, 3$. Si tratta di un sistema lineare con 9 equazioni (ottenute al variare di i e j tra 1 e 3) in 9 incognite (le $a_{i,j}$). Osserviamo due equazioni "tipo" (le altre 7 saranno tutte analoghe o all'una o all'altra), quella ottenuta dall'uguagliare l'elemento di posto $(1,1)$ di AB con quello del medesimo posto di BA (vedi sotto equazione (3.2) e quella ottenuta uguagliando l'elemento di posto $(1,2)$ (vedi sotto equazione (3.3):

$$a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} = b_{1,1}a_{1,1} + b_{1,2}a_{2,1} + b_{1,3}a_{3,1}, \tag{3.2}$$

$$a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} = b_{1,1}a_{1,2} + b_{1,2}a_{2,2} + b_{1,3}a_{3,2}. \tag{3.3}$$

L'equazione (3.2) diventa $a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} = b_{1,2}a_{2,1} + b_{1,3}a_{3,1}$ (nella (3.3) invece non è possibile fare alcuna semplificazione). La semplificazione del termine $a_{i,i}b_{i,i}$ si verifica ogni volta che in una equazione di quelle nove di cui sopra appaiono termini coi due elementi del pedice uguali, ossia ogni volta che appaiono termini sulla diagonale. Il che fa osservare che ai termini della diagonale di A non verrà imposto nulla da queste equazioni ed essi saranno quindi liberi di variare in tutto $\mathbb{R}$. Per gli altri termini invece dovranno essere verificate le equazioni di cui sopra per ogni valore reale di $b_{i,j}$, il che è ovviamente possibile solo se gli elementi $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j$. Queste ultime due osservazioni permettono di concludere che A può essere solo una matrice diagonale.

Esercizio 3.5.30 Trovare due matrici quadrate A e B non nulle e diverse tra loro tali che $AB = O$.

Soluzione Esercizio: Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.5.31 Sia data la matrice quadrata $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$. Dire, al variare di k, se esiste una matrice B tale che $AB = I$.

Soluzione Esercizio: Dovremo avere:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ kb_{11} + b_{21} & kb_{12} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

quindi $b_{21} = 1$, $b_{22} = 0$, da cui, se $k \neq 0$: $b_{11} = -\frac{1}{k}$, $b_{12} = \frac{1}{k}$. Per $k = 0$ la matrice B (inversa di A) non esiste.

Esercizio 3.5.32 È vero che se A è una matrice di rango massimo allora anche $A + {}^tA$ ha rango massimo?

Soluzione Esercizio: No, ad esempio sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Essa ha chiaramente rango 2. La sua trasposta sarà ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 1.

Esercizio 3.5.33 * Ricordiamo che una matrice si dice *idempotente* se $A^2 = A$. Dimostrare che se A e B sono due matrici tali che $AB = A$ e $BA = B$ allora A e B sono idempotenti.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 3.5.34 Sia A una matrice $m \times n$ e sia B una matrice $n \times p$. Dimostrare che ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$.

Soluzione Esercizio: Siano $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots m, j=1,\dots,n}$ e
$B = (b_{i,j})_{i=1,\dots n, j=1,\dots,p}$.
Dunque $AB = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})_{i=1,\dots m, j=1,\dots,p}$,
perciò ${}^t(AB) = (\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}b_{k,i})_{j=1,\dots,p, i=1,\dots m}$.
Ora ${}^tB = (b_{j,i})_{j=1,\dots,p, i=1,\dots n}$ e ${}^tA = (a_{j,i})_{j=1,\dots,n, i=1,\dots m}$, da cui $({}^tB)({}^tA) = (\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}a_{k,i})_{j=1,\dots,p, i=1,\dots m}$.

Esercizio 3.5.35 Mostrare che per ogni coppia di matrici vale la seguente uguaglianza:

$${}^t(A + B) ={}^t A +{}^t B.$$

Soluzione Esercizio: Sia $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$; avremo allora che $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, e quindi ${}^t(A + B) = (a_{ji} + b_{ji}) ={}^t A +{}^t B$.

Esercizio 3.5.36* Sia data la matrice quadrata $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare, al variare di n, la matrice A^n. Determinare, se possibile, la matrice A^{-1} e, se tale matrice esiste, verificare che $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Soluzione Esercizio: Vogliamo vedere che $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per induzione: per $n = 1$ l'affermazione è banalmente vera. Supponiamo che la cosa sia vera per $n \geq 1$ e mostriamo che allora è vera per $n + 1$. Avremo:

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e la dimostrazione è completa.

Con il metodo della doppia eliminazione di Gauss si può ricavare $(A^n)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & n & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -n \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.5.37 Date due matrici quadrate A e B dello stesso ordine, è vero che $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$?

Soluzione Esercizio: Si avrà :

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$$

e poiché non è detto che $AB = BA$, in generale l'uguaglianza non sarà verificata (ad esempio se A, B sono quelle del prossimo esercizio).

Esercizio 3.5.38 Fare un esempio di due matrici quadrate $A, B \in \mathbb{R}^{3,3}$ tali che $AB \neq BA$.

Soluzione Esercizio: Ad esempio siano:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

avremo:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.5.39* Sia data la matrice quadrata $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare, al variare di n, la matrice A^n. Determinare, se possibile, la matrice A^{-1} e, se tale matrice esiste, verificare che $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Soluzione Esercizio: Vogliamo vedere che $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. Per induzione: per $n = 1$ l'affermazione è banalmente vera. Supponiamo che la cosa sia vera per $n \geq 1$ e mostriamo che allora è vera per $n+1$. Avremo:

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

e la dimostrazione è completa.

Notiamo poi che A ha rango 1 (e lo stesso ogni A^n), quindi non è invertibile.

Esercizio 3.5.40 Una matrice quadrata $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ si dice antisimmetrica se $a_{i,j} = -a_{j,i}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Dimostrare che:

1. Gli elementi sulla diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono tutti nulli;

2. A è antisimmetrica se e solo se ${}^tA = -A$.

Soluzione Esercizio:

1. Gli elementi sulla diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono tutti nulli, in quanto devono verificare $a_{i,i} = -a_{i,i}$.

2. A è antisimmetrica se e solo se ${}^tA = -A$. Questo segue immediatamente dal fatto che ${}^tA = (a_{j,i})$, quindi ${}^tA = -A$ se e solo se $a_{i,j} = -a_{j,i}$.