Capitolo 4

Sistemi lineari

Soluzioni Esercizi

Esercizio 4.6.1 Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 12y - 1988z = 9 \\ 18x + 4y + 2867z = -14 \\ 10x - 9y + 1212z = -19 \end{cases} .$$

Soluzione esercizio: $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$.

Esercizio 4.6.2 Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - z = 4 \end{cases} .$$

Soluzione esercizio: $(x, y, z) = (2, 0, 2)$.

Esercizio 4.6.3 Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 3z \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} .$$

Soluzione esercizio: Il sistema ammette ∞^1 soluzioni: $(x, y, z) = \alpha(-1, -1, -1)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.6.4 Dire se il sistema lineare $A \cdot X = B$ ha o no soluzioni e quante, ove:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio: Il sistema non ammette soluzione in quanto il rango di A è 2, mentre quello di $A|B$ è 3.

Esercizio 4.6.5 Dire se il sistema lineare $A \cdot X = B$ ha o no soluzioni e quante, ove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio: Il sistema ammette una sola soluzione in quanto $r(A) = r(A|B) = 3$.

Esercizio 4.6.6 Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = B$, con :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & k+3 & 0 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3 \\ k+1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

Soluzione esercizio: Vedi libro.

Esercizio 4.6.7 Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = B$, con :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ k & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -k \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

Soluzione esercizio: Il determinante di A vale $k^2 + 6k$, quindi per $k \neq 0, -6$ la matrice A ha rango 3. In tal caso anche la matrice $A|B$ ha rango 3, quindi se $k \neq 0, -6$, il sistema ammette una soluzione.
Se $k = 0$ si ha che $r(A) = r(A|B) = 2$ quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni.
Se $k = -6$ si ha che $r(A) = 2 < r(A|B) = 3$ quindi il sistema non ammette soluzione.

Esercizio 4.6.8 Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ x - y = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}.$$

Soluzione esercizio: Il sistema ha soluzione $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

Esercizio 4.6.9 Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases} .$$

Soluzione esercizio: Il sistema ha soluzione $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

Esercizio 4.6.10 Discutere al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ e risolvere, ove possibile, il seguente sistema lineare in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} hx + (2h - 1)y = 2 \\ x + hy = 2h \end{cases} .$$

Soluzione esercizio: Il determinante della matrice dei coefficienti vale $(h - 1)^2$.
Per $h = 1$ il rango della matrice dei coefficienti è 1 cosí come quello della matrice completata con la colonna dei termini noti, quindi in tal caso il sistema ammette ∞^1 soluzioni e sono tutte del tipo $\{(2 - y, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.
Se $h \neq 1$ la matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi il sistema ammette una sola soluzione $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x = 2(h^2 + 1)h/(h^2 - 2h + 1) - 2h$, $y = -2(h^2 + 1)/(h^2 - 2h + 1)$.

Esercizio 4.6.11 Discutere al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ e risolvere, ove possibile, il seguente sistema lineare in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + hy + z = 2h - 1 \\ x + y + hz = 0 \\ hx + y + z = 5 \end{cases} .$$

Soluzione esercizio: Vedi libro.

Esercizio 4.6.12 Discutere al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ e risolvere, ove possibile, il seguente sistema lineare in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ hx - y = -1 \\ 4x + y = 1 + h \end{cases} .$$

Soluzione esercizio: Il rango della matrice dei coefficienti è 2 per ogni valore di h quindi il sistema ammetterà soluzione solo per quegli h per i quali anche la matrice orlata con la colonna dei termini noti sarà 2.
Il determinante della matrice orlata vale $(2 - h)(2 + h)$, quindi si annulla per $h = \pm 2$.
Per $h = -2$ la soluzione è $(x, y) = (-1, 3)$.
Per $h = 2$ la soluzione è $(x, y) = (1/3, 5/3)$.

Esercizio 4.6.13 Discutere al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ e risolvere, ove possibile, il seguente sistema lineare in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + (h+1)y + z = 2 + h \\ (h+3)y + z = 2h^2 \\ x + (5+h)y + (1+h)z = 6 - h \end{cases}.$$

Soluzione esercizio: Il determinante della matrice dei coefficienti vale $h^2+3h-4 = (h-1)(h+4)$, quindi per $h \neq 1, -4$ il sistema ammette una soluzione:

$$\begin{cases} x = -2h^2 + 4h^3/(h^2+2h-7) + h - 4h^2/(h^2+2h-7) + 4h/(h^2+2h-7) - 8/(h^2+2h-7) + 2, \\ y = 2(h^3 - h^2 + h - 2)/(h^2+2h-7), \\ z = 2h^2 - 2(h^3 - h^2 + h - 2)(h+3)/(h^2+2h-7) \end{cases}$$

Se $h = 1$ la matrice dei coefficienti e quella orlata con la colonna dei termini noti hanno entrambe rango 2 quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni: $(x, y, z) = (2y + 1, y, 2 - 4y)$ con $y \in \mathbb{R}$.

Se $h = -4$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 mentre quella orlata con la colonna dei termini noti ha rango 3, quindi il sistema non ammette soluzione.

Esercizio 4.6.14 Risolvere il sistema $A \cdot X = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Soluzione esercizio Le soluzioni di questo sistema sono tutte del tipo $(x, y, z) = (-\alpha, 2\alpha, -\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.6.15 Risolvere il sistema $A \cdot X = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio: $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

Esercizio 4.6.16 Discutere il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y - z - t = 0 \\ kx - y - 2kz + 2t = 1 \\ 3kx - 6kz + 3t = 2 \end{cases}.$$

Soluzione esercizio: I minori di ordine 3 della matrice dei coefficienti valgono: $3k, 3k-3, 3k, 6k-3$, quindi non c'è nessun valore di k che li annulli tutti, perciò la matrice dei coefficienti ha rango 3 per ogni valore di k, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni del tipo $(x, y, z, t) =$

$(((2h-1)z+4)/(h-1), 2/3hz-2/3h^2z/(h-1)-hz/(h-1)+2/3z-4/3h/(h-1)+2/3z/(h-1)-8/3/(h-1)-7/3, z, 4/3hz-4/3h^2z/(h-1)+1/3z-8/3h/(h-1)+1/3z/(h-1)-4/3/(h-1)-2/3)$.

Esercizio 4.6.1 Discutere il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - kx_3 + 4x_4 = 5 \\ kx_1 + kx_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -k \end{cases} .$$

Soluzione esercizio: Vedi libro.

Esercizio 4.6.18 Discutere il seguente sistema lineare al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ hx + 2y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

dove h è un parametro reale.

Soluzione esercizio: La matrice dei coefficienti ha rango 2 per ogni valore di h. La matrice ottenuta orlando la matrice dei coefficienti con la colonna dei termini noti ha determinante $-4h$, quindi il sistema ha soluzione solo se $h = 0$, ed in tal caso la soluzione è $(x, y) = (2, 1)$.

Esercizio 4.6.19 Discutere e, ove possibile, risolvere il seguente sistema al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = h \\ -x + 3y + hz = 0 \\ 3x + 2y - 9z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

dove h è un parametro reale.

Soluzione esercizio: I minori di ordine 3 della matrice dei coefficienti valgono $-h-8, -3h-24, 0, 5h+40$, quindi l'unico valore di h per cui si annullano tutti è $h = -8$. In tal caso la matrice dei coefficienti ha rango 2, ma la matrice ottenuta orlando con la colonna dei termini noti ha rango 3, quindi se $h = -8$ il sistema non ha soluzione. Per $h \neq 8$ la matrice dei coefficienti ha invece rango 3 mentre la matrice ottenuta orlandola con la colonna dei termini noti ha determinante $-5h(h+8)$. Per $h = -8$ abbiamo già visto che il sistema non ha soluzione. L'unico caso in cui il sistema ammette soluzione è quindi $h = 0$ ed in tal caso, ammettendo una soluzione sola ed essendo il sistema omogeneo, la soluzione non può essere altro che $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Esercizio 4.6.20 Risolvere, se possibile, il seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2z = 2z \end{cases} .$$

Soluzione esercizio La matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi il sistema ammetta ∞^1 soluzioni. Esse sono gli elementi del sottospazio $\langle(0,0,1)\rangle$.

Esercizio 4.6.21 Discutere e, ove possibile, risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$, il seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ hz = 0 \end{cases}$$

dove h è un parametro reale.

Soluzione esercizio: Se $h \neq 0$ il sistema ammette solo la soluzione nulla in quanto la matrice dei coefficienti ha rango 3 ed il sistema è omogeneo. Se $h = 0$ allora la matrice dei coefficienti ha rango 2 e lo spazio delle soluzioni è il sottospazio $\langle(0,0,1)\rangle$.

Esercizio 4.6.23 Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare una base dello spazio delle righe ed una base dello spazio delle colonne.

Soluzione esercizio: Le due righe $(2,3,1)$ e $(1,1,0)$ sono due elementi indipendenti di $\mathbb{R}^3$, quindi sono una base dello spazio delle righe di A.

Le tre colonne $(2,1)$, $(3,1)$ e $(1,0)$ non possono essere indipendenti in $\mathbb{R}^2$ che ha dimensione 2; due di essi (ad esempio $(3,1)$ e $(1,0)$) sono indipendenti e anche una base per lo spazio delle colonne di A, che coincide con $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4.6.23 Si consideri $S \subseteq \mathbb{R}^3$, ove:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 3z = -7,\ 3x + y = 0\}.$$

Descrivere il generico elemento di S e dedurre che S non è un sottospazio di V.

Soluzione esercizio: L'elemento generico di S è del tipo $(x, -3x, -10/3x + 7/3)$ con $x \in \mathbb{R}$ quindi $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = (x, -3x, -10/3x + 7/3)\}$ quindi l'origine non appartiene ad S dunque S non è un sottospazio.

Esercizio 4.6.24 Trovare una base del seguente sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0,\ x - z = 0,\ 2x + 2y - z = 0\}.$$

Soluzione esercizio: Vedi libro.

Esercizio 4.6.25 Siano V_1 e V_2 i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ dati dalle soluzioni dai seguenti sistemi omogenei:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + 2z + t = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x - y - z - t = 0 \\ 4x - y + 2z - t = 0 \end{cases}.$$

Determinare la dimensione e una base di $V_1 \cap V_2$.

Soluzione esercizio: L'insieme $V_1 \cap V_2$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + 2z + t = 0 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 4x - y + 2z - t = 0 \end{cases} .$$

Trattandosi di un sistema lineare omogeneo possiamo dedurre che si tratta di un sottospazio.
Il rango della matrice dei coefficienti del sistema appena scritto è 3 quindi $V_1 \cap V_2$ è un sottospazio di dimensione 1. Una sua base è $\{(0, 1, 0, -1)\}$.

Esercizio 4.6.26 Siano $S_1 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - t = 0\}$ e $S_2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ y - 3z = 0\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base per $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathbb{R}^4$.

Soluzione esercizio: L'insieme $S_1 \cap S_2$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y - t = 0 \\ x - y = 0, \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

Una base di $S_1 \cap S_2$ è $\{(-3, -3, -1, 0)\}$.

Esercizio 4.6.27 Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro reale e siano S_1, S_2 sottospazi di $\mathbb{R}^4$ cosí definiti:

$$S_1 := \{(x, y, z, t) \in V \mid hy + t = 0,\ 2x - z = 0\},$$

$$S_2 := \{(x, y, z, t) \in V \mid y - hz = 0,\ (h + 1)x - 2z - ht = 0\}.$$

Stabilire la dimensione di $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione esercizio: Vedi libro.

Esercizio 4.6.28 Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro reale e sia $S \subset \mathbb{R}^4$ il seguente sottospazio:

$$S := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - hy + ht = 0,\ -2y - z + t = 0,\ x + y + hz = 0\}.$$

Stabilire la dimensione di S al variare di $h \in \mathbb{R}$ e trovarne una base.

Soluzione esercizio: Gli elementi del sottospazio S sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - hy + ht = 0 \\ -2y - z + t = 0 \\ x + y + hz = 0 \end{cases} .$$

I minori di ordine 3 della matrice dei coefficienti di questo sistema valgono $-h + 1, h - 1, 0, -h^2 + h$. L'unico valore di h che li annulla tutti è

$h = 1$. Quindi per $h = 1$ il sistema ha ∞^2 soluzioni quindi la dimensione di S è 2, mentre per $h \neq 1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni quindi la dimensione di S è 1.
Per $h = 1$ una base di S è $\{(1/2, 1/2, -1, 0), (1/2, -1/2, 0, -1)\}$.
Per $h \neq 1$ una base di S è data da $\{(-h, 0, 1, 1)\}$.

Esercizio 4.6.30 Scrivere un sistema lineare di 3 equazioni in due incognite avente $(3, 0)$ come unica soluzione. È vero che una delle equazioni è combinazione lineare delle altre? È vero che sono tutte proporzionali?

Soluzione esercizio: Vedi libro.

Esercizio 4.6.31 * Costruire, se esistono, quattro sistemi lineari di 2 equazioni in 3 incognite in modo che in ciascuno di essi sia verificata una delle seguenti proprietà:

1. il sistema ammetta una e una sola soluzione;
2. esistano 10 diverse soluzioni del sistema;
3. il sistema ammetta esattamente 4 soluzioni;
4. il sistema non ammetta soluzioni.

Soluzione esercizio: Vedi libro.

Esercizio 4.6.32 * Sia $AX = B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false (per quelle false trovare un controesempio):

1. se $B = 0$ il sistema ha sempre almeno una soluzione;
2. se $n = m + 1$ il sistema ha sempre almeno una soluzione;
3. se $n > m$ il sistema ha sempre ∞^{m-n} soluzioni;
4. se $n < m$ il sistema non ha mai soluzione.

Soluzione esercizio:

1. Sí, quella nulla.
2. No. Ad esempio se prendiamo $m = 2$, $n = 3$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

   non ammette ovviamente soluzione perché il rango della matrice dei coefficienti è 1 mentre il rango della matrice orlata coi termini noti è 2.

3. No. L'esempio del punto precedente vale anche in questo caso.

4. No: il sistema
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$
ammette ∞^1 soluzioni in quanto è omogeneo e la matrice dei coefficienti ha rango 2.

Esercizio 4.6.33* L'ingegnere gestionale di una fabbrica metalmeccanica deve gestire il magazzino produzione. Nella fabbrica vengono prodotti bulloni, dadi, rondelle e copiglie. Con una barra di ferro si producono 500 bulloni e 2.000 dadi; con un foglio di lamiera si producono 4.000 rondelle e con una matassa di filo 1.000 copiglie. Nella produzione di ciascuno di essi vi sono mediamente le seguenti percentuali di scarto: 0,5% di bulloni e di dadi, 0,01% di rondelle e copiglie. A fine mese verranno venduti 10.000.000 di bulloni e altrettanti di dadi, 15.000.000 di rondelle e 1.000.000 di copiglie. Quale sistema lineare (in forma matriciale) deve impostare l'ingegnere per sapere quanto nuovo materiale acquistare nel frattempo affinché a inizio del mese seguente il magazzino sia pieno ma senza esuberi?

Soluzione Esercizio: Siano x_1 il numero di barre di ferro che servono per produrre 10.000.000 bulloni, x_2 quelle che servono per produrre 10.000.000 dadi, y il numero fogli di lamiera che servono a produrre 15.000.000 rondelle e z il numero di matasse di filo che servono a produrre 1.000.000 copiglie. Per conoscere il valore di x_1, x_2, y, z occorre risolvere il seguente sistema matriciale:
$$\begin{pmatrix} 0,995 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 10.000.000 \\ 10.000.000 \\ 15.000.000 \\ 1.000.000 \end{pmatrix}.$$
La soluzione di questo sistema è
$$\begin{cases} x_1 = 20.100,5 \\ x_2 = 5.025,1 \\ y = 3.750,3 \\ z = 1.000,1 \end{cases}.$$
Quindi per produrre 10.000.000 bulloni servono 20.101 barre di ferro, mentre per produrre 10.000.000 dadi di barre di ferro ne servono 5.026. Per produrre 15.000.000 rondelle occorrono 3.751 fogli di lamiera e per produrre 1.000.000 copiglie servono 1.001 matasse di filo. Quindi se il capomagzzino vuole che a inizio mese vi sia materiale sufficiente per produrre tutto ciò che si aspetta di vendere ma senza esuberi, per i fogli

di lamiera e le matasse di filo non avrà dubbi: 3.751 fogli di lamiera e 1.001 matasse di filo, mentre per le barre di ferro dovà scegliere il numero maggiore tra x_1 ed x_2 ossia 20.101.

Esercizio 4.6.34 Considerare in $\mathbb{R}^4$, con coordinate x, y, z, t, il sottospazio vettoriale W definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + y + t = 0 \end{cases}.$$

Descrivere la forma generica degli elementi di W e determinarne la dimensione.

Soluzione Esercizio: Dalla prima equazione si ha $t = y - x$, che, sostituendo nella seconda, dà $x = -2y$, dalla quale si ricava ancora: $t = 3y$. Quindi le soluzioni del sistema possono scriversi: $(-2y, y, z, 3y)$. Avendosi due variabili libere, !dim $W = 2$. Una base è : $\{(-2, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 0)\}$.

Esercizio 4.6.35 Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \\ 23 & 24 & 25 & 26 \\ 33 & 34 & 35 & 36 \\ 43 & 44 & 45 & 46 \end{pmatrix}.$$

Soluzione Esercizio: Eseguiamo l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la prima matrice ha rango 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Quindi la seconda matrice ha rango 3.

Sulla terza matrice operiamo per prima cosa sottraendo la prima riga dalle altre, poi, nella matrice così ottenuta sottraiamo la seconda riga alle altre fino a ottenere solo due righe non nulle:

$$\begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \\ 23 & 24 & 25 & 26 \\ 33 & 34 & 35 & 36 \\ 43 & 44 & 45 & 46 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la terza matrice ha rango 2.

Esercizio 4.6.36* Considerare il sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ definito dalla seguente equazione omogenea: $ax + by + cz = 0$. Determinare i possibili valori di a, b, c, sapendo che i vettori $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 0)$ appartengono a W.

Soluzione Esercizio: Sostituendo i due vettori nell'equazione di W si ottiene:

$a + b + c = 0, \quad b = 0.$

Quindi avremo $b = 0$, $a = -c$, e l'equazione di W diviene (scegliendo $c = 1$): $-x + z = 0$.

Esercizio 4.6.37 Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 27 & 27 & 27 & 27 \\ 55 & 55 & 55 & 55 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 & 1111 \\ 0 & 10 & 110 & 1110 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione Esercizio: Eseguendo l'eliminazione di Gauss è immediato vedere che la prima matrice ha rango 1. Per la seconda avremo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la seconda matrice ha rango 2.

Per la terza matrice, prima sottraiamo la seconda riga dalla prima, poi eseguiamo Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 & 1111 \\ 0 & 10 & 110 & 1110 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 110 & 1110 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 110 & 1110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 90 & 1080 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la terza matrice ha rango 3.

Esercizio 4.6.38 Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 2y + t = 1 \end{cases}.$$

1. Scrivere in forma matriciale il sistema e ridurlo ad un sistema a scala equivalente usando l'algoritmo di Gauss.

2. Scrivere la soluzione generale del sistema, evidenziando le variabili libere.

3. Indicata con A la matrice incompleta (o dei coefficienti) del sistema, trovare una base dello spazio V dei vettori B per i quali $AX = B$ ammette soluzioni.

Soluzione Esercizio:

1. La forma matriciale del suddetto sistema è
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$
Dopo aver eseguito le seguenti operazioni di riga: $II \to I - II$, $III \to III - 3I$, $III \to 5II + 2III$ si ottiene la seguente forma a gradini:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

2. Le soluzioni del sistema sono del tipo $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 4z - 1, y = 3z - 1, t = -6z + 2\}$ quindi l'unica variabile libera è la z.

3. Poiché il sistema lineare $AX = B$ risulta risolvibile se e soltanto se il vettore B dei termini noti è una combinazione lineare delle colonne di A (i cui coefficienti sono identificabili con i valori delle incognite corrispondenti ad una soluzione), lo spazio V coincide con lo spazio delle colonne di A, spazio generato dalle colonne della matrice incompleta. Ovviamente una base dello spazio delle colonne di A è formata dalle colonne di A che corrispondono ai pivot nella matrice ridotto a scala. La base richiesta è pertanto:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.6.39 Disegnare le soluzioni del seguente sistema lineare
$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}.$$

Soluzione Esercizio: In Figura 4.1 sono rappresentati: in azzurro il piano individuato dall'equazione $x - y + 3z = 0$, in arancione il piano individuato dall'equazione $x + 2y - z = 0$. La soluzione del sistema lineare suddetto è la retta di intersezione dei due piani.

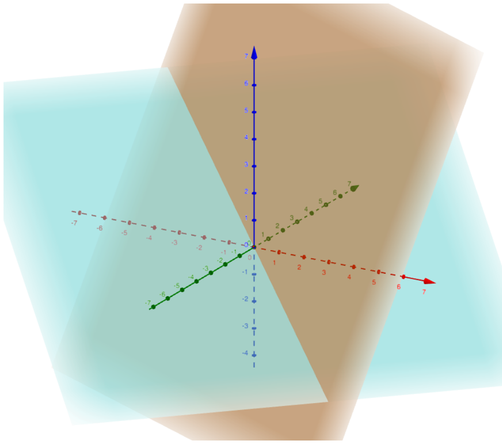

Figura 4.1: Rappresentazione grafica dell'Esercizio 4.6.39.

Esercizio 4.6.40 Disegnare l'intersezione tra il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ definito da $U := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, z = 0\}$ e l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ -x + z + t = 1 \end{cases} .$$

Soluzione Esercizio: Osserviamo innanzitutto che fare un disegno in $\mathbb{R}^4$ non è possibile, quindi cerchiamo di trovare un "trucco" per poter rispondere all'esercizio. Il sottospazio U ha banalmente dimensione 3. Quindi, essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, per definizione di sottospazio, ha esso stesso la struttura di spazio vettoriale. Possiamo quindi considerare U lo spazio ambiente (tridimensionale) all'interno del quale andare a fare il disegno richiesto. Quindi nella Figura 4.2 che andremo a fare, lo spazio U non si verdà ma sarà lo spazio ambiente in cui andremo a fare il nostro disegno. [1] Il sottopazio U ha come base $\{e_1, e_2, e_4\}$, quindi la Figura 4.2 sarà in queste coordinate; nello specifico, l'asse rosso rappresenta l'asse delle x, quello verde l'asse delle y e quello blu lasse delle t. Se dobbiamo studiare l'intersezione tra U e il sistema lineare dato, è come studiare il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - 2y - z = 2 \\ -x + z + t = 1 \end{cases} .$$

[1]Un po' come gli abitanti di flatlandia che vedono solo il loro ambiente piatto e di una sfera vedono sono le circonferenze sezioni tra la sfera e il mondo piatto in cui vivono (*Flatlandia: Racconto fantastico a più dimensioni (Flatland: A Romance of Many Dimensions)*, 1884, Edwin Abbott Abbott), o meglio come gli abitanti del mondo tridimensionale che non riescono a concepire l'esistenza di un cubo quadridimensionale.

che è chiaramente equivalente ad intersecare i due sottoinsiemi (sia di $\mathbb{R}^4$ che di U) definiti dai due seguenti sistemi lineari:

$$S_1 : \begin{cases} z = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 : \begin{cases} z = 0 \\ -x + t = 1 \end{cases} .$$

Quindi il disegno che stiamo cercando è l'intersezione dello spazio delle soluzioni di S_1 con lo spazio delle soluzioni di S_2. In Figura 4.2 lo spazio delle soluzioni di S_1 è rappresentato dal piano azzurro, lo spazio delle soluzioni di S_2 è rappresentato dal piano verde, quindi il disegno cercato è la retta di intersezione di questi due piani.

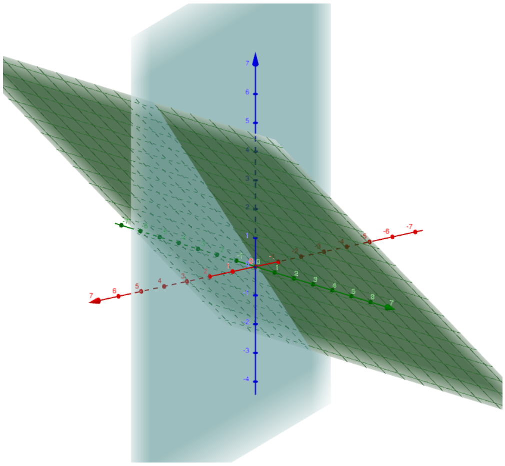

Figura 4.2: Rappresentazione grafica dell'Esercizio 4.6.40: lo spazio ambiente è $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, z = 0\}$. Il piano azzurro è l'intersezione di U e dello spazio tridimensionale definito da $x - 2y - z = 2$. Il piano azzurro è l'intersezione tra U e lo spazio tridimensionale definito da $-x + t = 1$. La soluzione cercata è la retta di intersezione tra questi due piani.