Capitolo 8

Spazi Euclidei

Soluzioni Esercizi

Esercizio 8.6.1 In $\mathbb{E}^2$, si calcoli il prodotto scalare tra i seguenti vettori, a due a due:

$$\mathbf{v}_1 = (1,0),\ \mathbf{v}_2 = (3,-1),\ \mathbf{v}_3 = (0,4),\ \mathbf{v}_4 = (-10,4),\ \mathbf{v}_5 = (2,6).$$

Quali tra i vettori sono ortogonali tra loro?

Soluzione Esercizio:

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (1,0) \cdot (3,-1) = 1.3 + 0.(-1) = 3$; $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = (1,0) \cdot (0,4) = 0$; $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4 = (1,0) \cdot (-10,4) = -10$; $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_5 = (1,0) \cdot (2,6) = 2$; $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = (3,-1) \cdot (0,4) = -4$; $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4 = (3,-1) \cdot (-10,4) = -34$; $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_5 = (3,-1) \cdot (2,6) = 0$; $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_4 = (0,4) \cdot (-10,4) = 16$; $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_5 = (0,4) \cdot (2,6) = 24$; $\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_5 = (-10,4) \cdot (2,6) = 4$.

Risultano perpendicolari $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$; $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_5$.

Esercizio 8.6.2 In $\mathbb{E}^2$, si calcoli la norma dei seguenti vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1,0),\ \mathbf{v}_2 = (2-2),\ \mathbf{v}_3 = (1,-3),\ \mathbf{v}_4 = (-1,5),\ \mathbf{v}_5 = (3,7).$$

Soluzione Esercizio:

$$||\mathbf{v}_1|| = \sqrt{(1,0) \cdot (1,0)} = \sqrt{1} = 1;$$

$$||\mathbf{v}_2|| = \sqrt{(2,2) \cdot (2,2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$$

$$||\mathbf{v}_3|| = \sqrt{(1,-3) \cdot (1,-3)} = \sqrt{10};$$

$$||\mathbf{v}_4|| = \sqrt{(-1,5) \cdot (-1,5)} = \sqrt{26};$$

$$||\mathbf{v}_5|| = \sqrt{(3,7) \cdot (3,7)} = \sqrt{58}.$$

Esercizio 8.6.3 In $\mathbb{E}^2$, si calcoli la distanza tra le coppie di vettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ dell'esercizio precedente.

Soluzione Esercizio:
$d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = ||\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|| = ||(-1, -2)|| = \sqrt{(-1, -2) \cdot (-1, -2)} = \sqrt{5}$.

$d(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = ||\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4|| = ||(2, -8)|| = \sqrt{(2, -8) \cdot (2, -8)} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

Esercizio 8.6.4 In $\mathbb{E}^3$, si calcoli la proiezione ortogonale $\mathbf{v_w}$, di $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$ su $\mathbf{w} = (0, 1, -1)$. Si determini poi l'angolo tra i due vettori.

Soluzione Esercizio:
Si ha: $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{v_w}||\mathbf{w}|$; quindi

$$|\mathbf{v_w}| = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|} = \frac{|(1,3,2) \cdot (0,1,-1)|}{|(0,1,-1)|} = \frac{|3-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Avremo poi che

$$\mathbf{v_w} = \mathbf{w}\frac{|\mathbf{v_w}|}{|\mathbf{w}|} = (0,1,-1)\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Per l'angolo θ tra i due vettori, abbiamo:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}\right) = \arccos\left(\frac{(1,3,2) \cdot (0,1,-1)}{\sqrt{14}\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right).$$

Esercizio 8.6.5 In $\mathbb{E}^3$, si determinino i vettori ortogonali al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ (cioè lo spazio $\mathbf{v}^\perp$) e quelli di norma 1.

Soluzione Esercizio: Si ha:

$$\mathbf{v}^\perp = \{(x,y,z)|\ (x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0\} = \{(x,y,z)|\ x = 0\} = \{(0,y,z)\}.$$

In $\mathbf{v}^\perp$ i vettori di norma 1 (versori) saranno quelli tali che: $||(0, y, z)|| = 1$, e cioè tali che: $(0, y, z) \cdot (0, y, z) = y^2 + z^2 = 1$; l'insieme ottenuto è quindi la circonferenza di equazione $y^2 + z^2 = 1$ nel piano $x = 0$.

Esercizio 8.6.6 In $\mathbb{E}^3$, si determini il valore del parametro $h \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti due vettori siano ortogonali tra loro: $\mathbf{v} = (1, h, 3), \mathbf{w} = (h, 2, -4)$.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 8.6.7 In $\mathbb{E}^3$, si determini $h \in \mathbb{R}$ in modo che i seguenti due vettori siano ortogonali tra loro: $\mathbf{v} = (h, 0, 1), \mathbf{w} = (1, h, -h)$.

Soluzione Esercizio:

Dovrà aversi: $(h,0,1)\cdot(1,h,-h)=0$, quindi $h-h=0$, che si avvera per tutti i valori di h.

Esercizio 8.6.8 In $\mathbb{E}^3$, determinare i vettori ortogonali a $\mathbf{v}=(1,1,0)$ (cioè lo spazio $\mathbf{v}^\perp$). Determinare poi quelli di norma 1.

Soluzione Esercizio: Si ha:

$$\mathbf{v}^\perp=\{(x,y,z)|\,(x,y,z)\cdot(1,1,0)=0\}=\{(x,y,z)|\,x+y=0\}=\{(x,-x,z)\}.$$

In $\mathbf{v}^\perp$ i vettori di norma 1 (versori) saranno quelli tali che: $||(x,-x,z)||=1$, e cioè tali che: $(x,-x,z)\cdot(x,-x,z)=2x^2+z^2=1$; l'insieme ottenuto è quindi la circonferenza di equazione $2x^2+z^2=1$ nel piano $x+y=0$ (tale circonferenza è l'intersezione fra il piano e la sfera $x^2+y^2+z^2=1$).

Esercizio 8.6.9 In $\mathbb{E}^3$, determinare $W^\perp$, ove W sia il sottospazio $W\subset\mathbb{E}^3$ generato da $\{(0,1,0),(1,3,-2)\}$. Determinare poi l'insieme:
$$S=\{(x,y,z)\in W^\perp|||(x,y,z)||=1\}.$$

Soluzione Esercizio: Si ha:

$$W^\perp=\{(x,y,z)|\,(x,y,z)\cdot(0,1,0)=0;\ (x,y,z)\cdot(1,3,-2)=0\}=$$

$$=\ \{(x,y,z)|\ y=0,\ x+3y-2z=0\}=\{(2z,0,z)\}.$$

In $W^\perp$ i vettori di norma 1 (versori) saranno quelli tali che: $||(2z,0,z)||=1$, e cioè tali che: $(2z,0,z)\cdot(2z,0,z)=4z^2+z^2=1$; l'insieme ottenuto è quindi dato dai due punti $(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5})$ e $(-\frac{2}{\sqrt5},0,-\frac{1}{\sqrt5})$ (tali punti sono l'intersezione fra la retta $W^\perp$ e la sfera $x^2+y^2+z^2=1$).

Esercizio 8.6.10 In $\mathbb{E}^3$, determinare $W^\perp$, ove W sia il sottospazio $W\subset\mathbb{E}^3$ generato da $\{(1,1,1),(0,0,-2)\}$. Trovare $\dim W^\perp$ e una sua base.

Soluzione Esercizio:
Si ha:

$$W^\perp=\{(x,y,z)|\,(x,y,z)\cdot(1,1,1)=0;\ (x,y,z)\cdot(0,0,-2)=0\}=$$

$$=\ \{(x,y,z)|\ x+y+z=0,\ -2z=0\}=\{(x,-x,0)\}.$$

In $W^\perp$ i vettori di norma 1 (versori) saranno quelli tali che: $||(x,-x,0)||=1$, e cioè tali che: $(x,-x,0)\cdot(x,-x,0)=2x^2=1$; l'insieme ottenuto è quindi dato dai due punti $(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0)$ e $(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)$ (tali punti sono l'intersezione fra la retta $W^\perp$ e la sfera $x^2+y^2+z^2=1$).

Esercizio 8.6.11 In $\mathbb{E}^3$, determinare $W^\perp$, ove W sia il sottospazio $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x-y=3x=-x+z\}\subset\mathbb{R}^3$, e determinarne la dimensione e una base.

Soluzione Esercizio:

Si ha:

$$W = \{(x, y, z) |\ y = -2x,\ \ z = 4x\} = \{(x, -2x, 4x)\}.$$

Una base di W è data da $\{(1, -2, 4)\}$, quindi

$$W^\perp = \{(x, y, z) |\ (x, y, z) \cdot (1, -2, 4) = 0\} =$$

$$= \ \{(x, y, z) |\ x - 2y + 4z = 0\} = \{(2y - 4z, y, z)\}.$$

Si ha che $\dim W^\perp = 3 - \dim W = 2$. Una base di $W^\perp$ è : $\{(2, 1, 0), (-4, 0, 1)\}$.

Esercizio 8.6.12 In $\mathbb{E}^3$, sia data la base $\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{E}^3$ tramite il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Soluzione Esercizio:

Calcoliamo la base ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortonormalizzando la base data:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{(0, 1, 1)}{||(0, 1, 1)||} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Si ha poi $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{||\mathbf{w}_2||}$, dove:

$$\mathbf{w}_2 = (1, 0, 1) - [(1, 0, 1) \cdot (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})](0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) =$$

$$= (1, 0, 1) - 1/\sqrt{2}(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1, 0, 1) - (0, 1/2, 1/2) = (1, -1/2, 1/2)$$

Quindi

$$\mathbf{v}_2 = \frac{(1, -1/2, 1/2)}{||(1, -1/2, 1/2)||} = \frac{(1, -1/2, 1/2)}{\sqrt{3/2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Infine $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{||\mathbf{w}_3||}$, dove:

$$\mathbf{w}_3 = (1, 1, 0) - [(1, 1, 0) \cdot (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})](0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) -$$

$$[(1, 1, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)] \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= (1, 1, 0) - (0, 1/2, 1/2) - (1/3, -1/6, 1/6) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_3 = \frac{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})}{||(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})||} = \frac{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})}{\sqrt{4/3}} = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}\right).$$

Esercizio 8.6.13 Si ripeta l'esercizio precedente partendo da

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 4), (5, -2, 1), (0, 1, 1)\}.$$

e poi da
$$\mathcal{B} = \{(0,-2,2),(1,2,1),(1,1,1)\}.$$

Soluzione Esercizio:

Calcoliamo la base ortonormale $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ ortonormalizzando la base $\mathcal{B} = \{(1,2,4),(5,-2,1),(0,1,1)\}$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{(1,2,4)}{||(1,2,4)||} = \frac{(1,2,4)}{\sqrt{21}} = \left(\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right).$$

Si ha poi $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{||\mathbf{w}_2||}$, dove:

$$\mathbf{w}_2 = (5,-2,1)-[(5,-2,1)\cdot(1/\sqrt{21},2/\sqrt{21},4/\sqrt{21})](1/\sqrt{21},2/\sqrt{21},4/\sqrt{21}) =$$

$$= (5,-2,1) - 5/\sqrt{21}(1/\sqrt{21},2/\sqrt{21},4/\sqrt{21}) =$$

$$= (5,-2,1) - (5/21,10/21,20/21) = (100/21,-52/21,1/21).$$

Quindi

$$\mathbf{v}_2 = \frac{(100/21,-52/21,1/21)}{||(100/21,-52/21,1/21)||} = \frac{(100/21,-52/21,1/21)}{11\sqrt{105}} =$$

$$= \left(\frac{100}{11\sqrt{105}},-\frac{52}{11\sqrt{105}},\frac{1}{11\sqrt{105}}\right).$$

Infine $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{||\mathbf{w}_3||}$, dove:

$$\mathbf{w}_3 = (0,1,1) - [(0,1,1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}})](\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}})-$$

$$[(0,1,1)\cdot\left(\frac{100}{11\sqrt{105}},-\frac{52}{11\sqrt{105}},\frac{1}{11\sqrt{105}}\right)]\left(\frac{100}{11\sqrt{105}},-\frac{52}{11\sqrt{105}},\frac{1}{11\sqrt{105}}\right) =$$

$$= (0,1,1)-(6/21,12/21,24/21)-(-5100/12705,2652/12705,-51/12705) =$$

$$= \left(\frac{1470}{12705},\frac{2793}{12705},-\frac{1764}{12705}\right) = \left(\frac{14}{121},\frac{133}{605},-\frac{84}{605}\right).$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_3 = \frac{(\frac{14}{121},\frac{133}{605},-\frac{84}{605})}{||(\frac{14}{121},\frac{133}{605},-\frac{84}{605})||} = \frac{(\frac{14}{121},\frac{133}{605},-\frac{84}{605})}{77\sqrt{5}/605} = \left(\frac{10}{11\sqrt{5}},\frac{19}{11\sqrt{5}},-\frac{12}{11\sqrt{5}}\right).$$

Calcoliamo ora unaa base ortonormale $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ ortonormalizzando invece la base $\mathcal{B} = \{(0,-2,2),(1,2,1),(1,1,1)\}$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{(0,-2.2)}{||(0,-2.2)||} = \frac{(0,-2.2)}{2\sqrt{2}} = \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Si ha poi $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{||\mathbf{w}_2||}$, dove:

$$\mathbf{w}_2 = (1,2,1) - [(1,2,1)\cdot(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})](0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) =$$

$$= (1,2,1) + 1/\sqrt{2}(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) =$$

$$= (1,2,1) + (0,-1/2,1/2) = (1,3/2,3/2).$$

Quindi

$$\mathbf{v}_2 = \frac{(1,3/2,3/2)}{||(1,3/2,3/2)||} = \frac{(1,3/2,3/2)}{\sqrt{22}/2} =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}}\right).$$

Infine $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{||\mathbf{w}_3||}$, dove:

$$\mathbf{w}_3 = (1,1,1) - [(1,1,1)\cdot(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})](0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) -$$

$$[(1,1,1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}}\right)]\left(\frac{2}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}}\right) =$$

$$= (1,1,1) - (16/22,24/22,24/22) = (1,1,1) - (8/11,12/11,12/11) =$$

$$= (3/11,-1/11,-1/11).$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_3 = \frac{(3/11,-1/11,-1/11)}{||(3/11,-1/11,-1/11)||} = \frac{(3/11,-1/11,-1/11)}{\sqrt{11}/11} =$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}}\right).$$

Esercizio 8.6.14 In $\mathbb{E}^3$, sia dato il sottospazio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 2y = x - z\}$. Trovare una base di W e una di $W^\perp$.

Soluzione Esercizio:
Si ha:

$$W = \{(x,y,z)|\ x = 2y,\ z = 0\} = \{(2y,y,0)\}.$$

Una base di W è data da $\{(2,1,0)\}$, quindi

$$W^\perp = \{(x,y,z)|\ (x,y,z)\cdot(2,1,0) = 0\} =$$

$$= \{(x,y,z)|\ 2x + y = 0\} = \{(x,-2x,z)\}.$$

Si ha che $\dim W^\perp = 3 - \dim W = 2$. Una base di $W^\perp$ è : $\{(1,-2,0),(0,0,1)\}$.

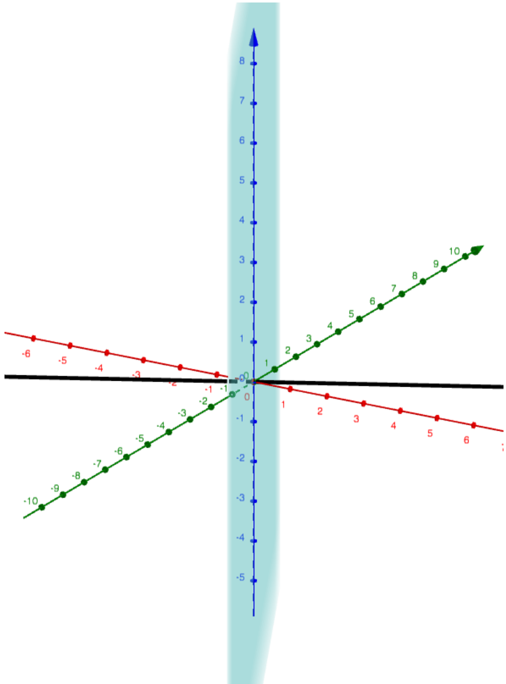

Figura 8.1: Esercizio 8.6.15.

Esercizio 8.6.15 Disegnare W e $W^\perp$ dell'esercizio precedente.

Soluzione Esercizio: W è la retta di Figura 8.1, $W^\perp$ il piano.

Esercizio 8.6.16 In $\mathbb{E}^4$, sia dato il sottospazio $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y = z\}$. Trovare una base di W e una di $W^\perp$.

Soluzione Esercizio: Si ha:

$$W = \{(x, y, z, t)|\ z = x - y\} = \{(x, y, x - y, t)\}.$$

Una base di W è data da $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, quindi

$$W^\perp = \{(x, y, z, t)|\ x + z = 0; y - z = 0; t = 0\} = \{(-z, z, z, 0)\}.$$

Si ha che $\dim W^\perp = 4 - \dim W = 1$. Una base di $W^\perp$ è : $\{(-1, 1, 1, 0)\}$.

Esercizio 8.6.17 Calcolare e disegnare nello spazio tridimensionale $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, t = 0\}$ i sottospazi $W \cap U$ e $W^\perp \cap U$ dove W e $W^\perp$ sono stati calcolati nell'esercizio precedente.

Soluzione Esercizio: $W \cap U$ è il piano di Figura 8.2, $W^\perp \cap U$ la retta.

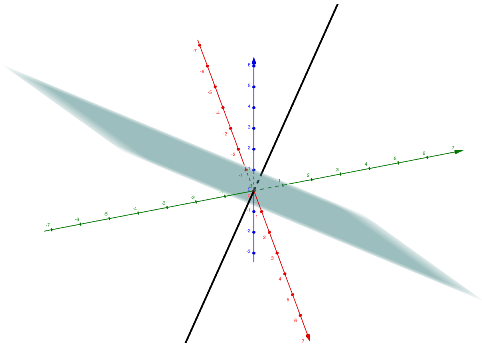

Figura 8.2: Esercizio 8.6.17.

Esercizio 8.6.18 Si considerino gli Esercizi 8.6.14 e 8.6.16 precedenti. Trovare basi ortogonali per W e $W^\perp$ in ognuno dei casi.

Soluzione Esercizio:

Es. 8.6.14 Una base ortonormale di W è $\{(2,1,0)/\sqrt{5}\}$.
Una base ortonormale di $W^\perp$ è $\{(1,-2,0)/\sqrt{5},(0,0,1)\}$.

Es. 8.6.16 Una base ortonormale di W è $\{(0,0,0,1),(0,1,-1,0)/\sqrt{2},(1,0,1,0)/\sqrt{2}\}$.
Una base ortonormale di $W^\perp$ è $\{(-1,1,1,0)/\sqrt{3}\}$.

Esercizio 8.6.19 In $\mathbb{E}^4$, sia dato il sottospazio $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+z=0, 2y-t=0\}$. Trovare una base di W e una di $W^\perp$.

Soluzione Esercizio:
Si ha:

$$W = \{(x,y,z,t)|\ z=-x;\ t=2y\} = \{(x,y,-x,2y)\}.$$

Una base di W è data da $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,2)\}$, quindi

$$W^\perp = \{(x,y,z,t)|\ x-z=0; y+2t=0\} = \{(x,-2t,x,t)\}.$$

Si ha che $\dim W^\perp = 4 - \dim W = 2$. Una base di $W^\perp$ è : $\{(1,0,1,0),\ (0,-2,0,1)\}$.

Esercizio 8.6.17 Si considerino i tre esercizi precedenti. Trovare basi ortogonali per W e $W^\perp$ in ognuno dei tre casi.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 8.6.18 In $\mathbb{E}^4$, sia dato il sottospazio $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+z=0, x-t=0, t+z=0\}$. Trovare una base di W e una di $W^\perp$.

Soluzione Esercizio:
Si ha:

$$W = \{(x,y,z,t)|\ z=-x;\ t=x\} = \{(x,y,-x,x)\}.$$

Una base di W è data da $\{(1,0,-1,1),(0,1,0,0)\}$, quindi

$$W^{\perp} = \{(x,y,z,t)|\ x-z+t=0; y=0\} = \{(x,0,x+t,t)\}.$$

Si ha che $\dim W^{\perp} = 4 - \dim W = 2$. Una base di $W^{\perp}$ è : $\{(1,0,1,0),\ (0,0,1,1)\}$.

Esercizio 8.6.19 In $\mathbb{E}^5$, sia dato il sottospazio $W = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 | x+z-t=0, y+z+u=0, x+2y+3z+u=0, x-v=0\}$. Trovare una base di W e una di $W^{\perp}$.

Soluzione Esercizio: Si ha:

$$W = \{(x,y,z,u,v)|\ u=-y-z; t=x+z; u=-x-2y-3z; x=v\} =$$

$$= \{(-y-2z, y, z, -y-z, -y-2z)\}.$$

Una base di W è data da $\{(-1,,1,0,-1,-1),(-2,0,1,-1,-2)\}$, quindi

$$W^{\perp} = \{(x,y,z,t)|\ -x+y-u-v=0; -2x+z-u-2v=0\} =$$

$$= \{(x, x+u+v, 2x+u+2v, u, v)\}.$$

Si ha che $\dim W^{\perp} = 4 - \dim W = 3$. Una base di $W^{\perp}$ è :

$$\{(1,1,2,0,0),\ (0,1,1,1,0),(0,1,2,0,1)\}.$$

Esercizio 8.6.20 In $\mathbb{E}^5$, sia dato il sottospazio $W = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x+z-t=0, y+z+u=0, x+2y+3z+u=0, x-v=0\}$. Trovare una base di W e una di $W^{\perp}$.

Soluzione Esercizio: NB: Nel testo stampato c'è un errore di battitura: l'ultima equazione di W è $x-u=0$. Una base di W è $\{(1,-1,0,1,1)\}$ quindi $W^{\perp} = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{E}^5 \,|\, x-y-t+u=0\} = \langle (1,1,0,0,0),(1,0,0,1,0),(0,0,1,0,0),(-1,0,0,0,1)\rangle$.

Esercizio 8.6.21 * In $\mathbb{E}^3$, determinare il parametro $h \in \mathbb{R}$ tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (h,1,0)$ sul vettore $\mathbf{w} = (2,0,1)$ abbia norma 2.

Soluzione Esercizio:
Si ha:

$$|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| = |\mathbf{v}_{\mathbf{w}}||\mathbf{w}|;$$

quindi si vuole:

$$|\mathbf{v}_{\mathbf{w}}| = \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|} = 2,$$

che dà

$$|\mathbf{v}_{\mathbf{w}}| = \frac{|(h,1,0)\cdot(2,0,1)|}{|(2,0,1)|} = \frac{|2h|}{\sqrt{5}} = 2,$$

e quindi $h = \pm\sqrt{5}$.

Esercizio 8.6.22 In $\mathbb{E}^4$, si considerino i seguenti vettori: $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (3,1,-1,h)$. Si determini il valore del parametro $h \in \mathbb{R}$ in modo tale che l'angolo tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sia di 45 gradi. Per quale h invece i due vettori sono ortogonali?

Soluzione Esercizio:
La formula per l'angolo fra due vettori è:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_1||\ ||\mathbf{v}_2||}\right);$$

quindi vogliamo che (visto che 45 gradi $= \frac{\pi}{4}$):

$$\frac{\pi}{4} = \arccos\left(\frac{(1,0,1,0)\cdot(3,1,-1,h)}{||(1,0,1,0)||\ ||(3,1,-1,h)||}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{2(11+h^2)}}\right);$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11+h^2}} \quad \text{i.e.} \quad 11+h^2 = 4,$$

che non ha soluzioni reali, quindi l'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non è mai di 45 gradi.

Se invece vogliamo $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, dovremmo porre: $(1,0,1,0)\cdot(3,1,-1,h) = 2 = 0$, di nuovo ottenendo che ciò non si realizza per nessun h.

Esercizio 8.6.22 In $\mathbb{E}^4$, si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1,-1,1,1), \quad \mathbf{v}_2 = (0,h,3,-h)$$

con h parametro reale. Si determini il valore di h in modo tale che l'angolo tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sia di 60 gradi. Per quale h invece i due vettori sono ortogonali?

Soluzione Esercizio:
La formula per l'angolo fra due vettori è:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_1||\ ||\mathbf{v}_2||}\right);$$

quindi vogliamo che (visto che 60 gradi $= \frac{\pi}{3}$):

$$\frac{\pi}{3} = \arccos\left(\frac{(1,-1,1,1)\cdot(0,h,3,-h)}{||(1,-1,1,1)||\ ||(0,h,3,-h)||}\right) = \arccos\left(\frac{3-2h}{2\sqrt{9+2h^2}}\right);$$

e quindi

$$\frac{1}{2} = \frac{3-2h}{2\sqrt{9+2h^2}} \quad \text{i.e.} \quad 9+2h^2 = (3-2h)^2 \quad (\text{con } 3-2h \geq 0\ ),$$

che dà $2h^2 - 12h = 0$, e quindi $h = 0$ (la soluzione $h = 6$ va scartata).

Se invece vogliamo $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, dovremo porre: $(1,-1,1,1)\cdot(0,h,3,-h) = 3-2h = 0$, ottenendo $h = \frac{3}{2}$.

Esercizio 8.6.24 Stabilire se il seguente prodotto su $\mathbb{R}^3$ sia un prodotto scalare: $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = 2xx' + xy' + yx' + 5yy' + zz'$. In caso affermativo determinare il sottospazio $\mathbf{v}^{\perp}$, ove $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ (rispetto a tale prodotto scalare).

Soluzione Esercizio:

La verifica delle condizioni 1-2-3 della Definizione 8.1.2 è piuttosto immediata, e la lasciamo al lettore. Per la 4, notiamo che

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x, y, z) \cdot (x, y, z) = \; 2x^2 + 2xy + 5y^2 + z^2 =$$

$$= (x + y)^2 + x^2 + 4y^2 + z^2,$$

che è sempre ≥ 0, e si annulla solo se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Quindi il prodotto assegnato è un prodotto scalare.

Avremo che nello spazio euclideo considerato:

$$(1, 0, 0)^{\perp} = \{(x, y, z) |\; (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0\} \;=\; \{(x, y, z) |\; 2x + y = 0\}.$$

Esercizio 8.6.25* Siano (x, y, z), $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Stabilire se le seguenti operazioni $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sono prodotti scalari:

1. $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = ax + 2by - zc$;

2. $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = bx + ay$;

3. $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = cx + ay + bz$;

4. $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = 2ax + 3by + cz$.

Soluzione Esercizio:

La verifica delle condizioni 1-2 della Definizione 8.1.2 è piuttosto immediata in tutti i casi, e la lasciamo al lettore. Quindi i prodotti considerati sono prodotti scalari se e solo se valgono la 3 e la 4, che ora prendiamo in considerazione.

1. è piuttosto immediato vedere che la 3 vale, ma per la 4 si ha: $(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$, che non è sempre ≥ 0 (ad esempio per (0,0,1) non lo è);

2. è piuttosto immediato vedere che la 3 vale, ma per la 4 si ha: $(x, y, z) \cdot (x, y, z) = 2xy$, che non è sempre ≥ 0 (ad esempio per (1,-1,0) non lo è);

3. è piuttosto immediato vedere che la 3 non vale: $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = cx + ay + bz$, mentre $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = za + xb + yc$;

4. è immediato vedere che la 3 vale, per la 4 si ha: $(x, y, z) \cdot (x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, che è sempre ≥ 0 e si annulla solo per $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Quindi i primi tre prodotti non sono prodotti scalari, mentre il quarto lo è .

Esercizio 8.6.26 In $\mathbb{E}^2$, dire quali dei tre seguenti endomorfismi siano isometrie: $f(x,y) = (2x+y, x+y)$; $f(x,y) = (y,x)$; $f(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x, -\frac{\sqrt{2}}{2}y)$.

Soluzione Esercizio:

- Per $f(x,y) = (2x+y, x+y)$ si ha: $f(1,0) \cdot f(1,0) = (2,1) \cdot (2,1) = 5$, mentre $(1,0) \cdot (1,0) = 1$, quindi la f non è un isometria.
- Per $f(x,y) = (y,x)$ si ha che
$$A = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
ed è immediato constatare che ${}^T A \cdot A = I$, quindi la f è un isometria.
- Per $f(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x, -\frac{\sqrt{2}}{2}y)$, si ha che
$$A = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
ed è immediato constatare che ${}^T A \cdot A = I$, quindi la f è un isometria.

Esercizio 8.6.27 Stabilire se esiste un valore di $h \in \mathbb{R}$ tale che il seguente endomorfismo di $\mathbb{E}^3$ sia una isometria: $f(x,y,z) = (hy, -hx, hz)$.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 8.6.28 Si consideri la seguente applicazione lineare: $f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tale f è un'isometria di $\mathbb{E}^3$?

Soluzione Esercizio:
Si ha che ${}^T A = A$, ma $A \cdot A \neq I$, quindi la f non è un isometria.

Esercizio 8.6.29 Si consideri la seguente applicazione lineare: $f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Tale f è un'isometria di $\mathbb{E}^3$?

Soluzione Esercizio:
Si ha che ${}^T A = A$, ma $A \cdot A \neq I$, quindi la f non è un isometria.

Esercizio 8.6.30 Determinare, se possibile, dei valori di $h, k \in \mathbb{R}$ tale che la seguente applicazione lineare sia un'isometria: $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2ky, hz + y, z)$.

Soluzione Esercizio: Si ha: $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (2k, 1, 0)$ e $f(0, 0, 1) = (0, h, 1)$. Vogliamo che questi vettori siano anche essi una base ortonormale, quindi si dovrà avere:

$$(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1, \quad (1, 0, 0) \cdot (2k, 1, 0) = 2k = 0,$$

$$(2k, 1, 0) \cdot (2k, 1, 0) = 4k^2 + 1 = 1, \quad (2k, 1, 0) \cdot (0, h, 1) = h = 0,$$

$$(0, h, 1) \cdot (0, h, 1) = h^2 + 1 = 1, \quad (1, 0, 0) \cdot (0, h, 1) = 0.$$

e quindi $h = k = 0$. In questo caso f è l'identità , e quindi un'isometria.

Esercizio 8.6.31 NB: Nel libro stampato vi è un errore di battitura nella definizione di f che qui abbiamo corretto.

Trovare gli $h \in \mathbb{R}$ affinché la seguente applicazione sia una isometria $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, $f(x, y) = (1/2x - hy, hx + 1/2y)$. Per tali h disegnare l'immagine della base canonica sotto tale isometria.

Soluzione Esercizio: Occorre imporre che $\{(1/2, h), (-h, 1/2)\}$ sia una base ortonormale. Questo è possibile solo se $h^2 = 3/4$. Abbiamo quindi due scelte possibili per h, ossia $h = \pm\sqrt{3}/2$.

La Figura 8.3 rappresenta la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ e la sua immagine dopo l'isometria $\{v, w\}$ nel caso $h = \sqrt{3}/2$.

La Figura 8.4 rappresenta la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ e la sua immagine dopo l'isometria $\{v, w\}$ nel caso $h = -\sqrt{3}/2$.

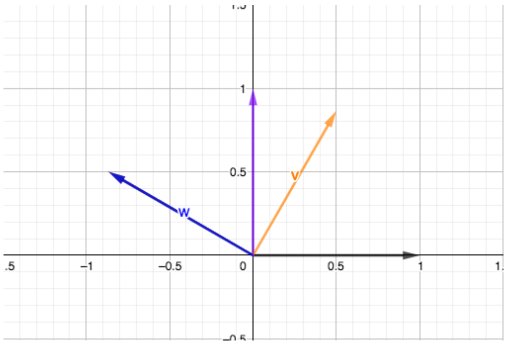

Figura 8.3: Esercizio 8.6.31. Caso $h = \sqrt{3}/2$.

Esercizio 8.6.32 * Una rotazione in $\mathbb{E}^3$ è un endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è la seguente:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & -\sin\beta & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix}.$$

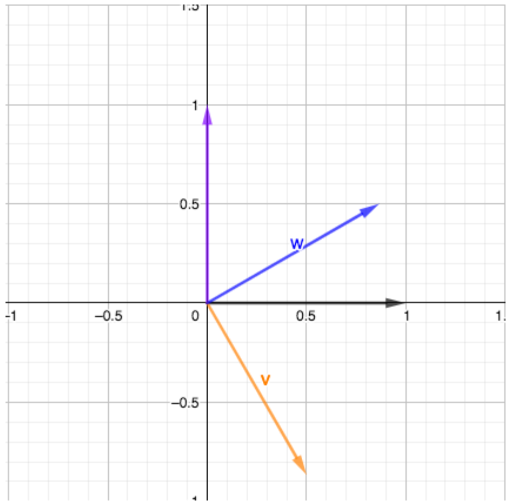

Figura 8.4: Esercizio 8.6.31. Caso $h = -\sqrt{3}/2$.

Mostrare che una rotazione in $\mathbb{E}^3$ è un'isometria.

Soluzione Esercizio: Detta A la matrice data, consideriamo il prodotto $A \cdot {}^TA$:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & -\sin\beta & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\beta\sin\gamma\gamma \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} =$$

Come si vede svolgendo il prodotto, esso dà la matrice identità e quindi la ritazione è un'isometria. Riportiamo qui solo il calcolo del prodotto della prima riga per la prima colonna, gli altri si svolgono in modo simile:

$$(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, -\sin\alpha\cos\beta, -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)\cdot$$

$$\cdot(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, -\sin\alpha\cos\beta, -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) =$$

$$= \cos^2\alpha\cos^2\gamma + \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin^2\alpha\cos^2\beta +$$

$$+\cos^2\alpha\sin^2\gamma + \sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma + 2\cos\alpha\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma =$$

$$= \cos^2\alpha(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) + \sin^2\alpha\sin^2\beta(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + \sin^2\alpha\cos^2\beta =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Esercizio 8.6.33 Dire se la seguente applicazione lineare sia un'isometria: $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$.

Soluzione Esercizio: È chiaramente un'isometria in quanto il vettore e_i della base canonica viene portato da f in e_{n-i+1} quindi l'immagine di $\mathcal{E}$ è $\{e_n, e_{n-1}, e_{n-2}, \dots, e_1\}$ che è ancora una base ortonormale.

Esercizio 8.6.34 Dire, giustificando la risposta, se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{E}^4$ tale che $\dim(W \cap W^\perp) = 1$.

Soluzione Esercizio: No in quanto se ci fosse un vettore $\mathbf{v} = (x, y, z, t) \in W \cap W^\perp$ non nullo dovrebbe succedere che esso è ortogonale sia a tutti i vettori di W che a tutti in vettori di $W^\perp$ quindi in particolare $\mathbf{v}$ dovrebbe essere ortogonale a se stesso, ossia $x^2 + y^2 + z^2 + tr = 0$ ma questo è possibile solo se $x = y = z = t = 0$, contro l'ipotesi che $\mathbf{v}$ fosse non nullo.

Esercizio 8.6.35 Considerare $(V; \cdot)$, ove $V = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0 \in \mathbb{R}$. Dire se sia uno spazio vettoriale euclideo. In caso affermativo, dire se se ne può trovare una base ortonormale.

Soluzione Esercizio: Chiaramente la funzione $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$ soddisfa tutte le proprietà di prodotto scalare su $V = \{\mathbf{0}\}$ ma non è possibile determinarne una base in quanto una base non può mai contenere il vettore nullo.

Esercizio 8.6.36 Considerare lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^2; \cdot)$, ove $(x, y) \cdot (a, b) = xa + 2yb \in \mathbb{R}$. Determinarne una base ortonormale.

Soluzione Esercizio: Ad esempio $\{(1, 0), (0, 1/\sqrt{2})\}$.

Esercizio 8.6.37 Mostrare che il seguente è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \cdot (a, b) = 4xa + 9yb \in \mathbb{R}$. Disegnare nel piano due vettori ortogonali rispetto a tale prodotto scalare.

Soluzione Esercizio: Dobbiamo verificare che tutte le proprietà del prodotto scalare siano verificate:

- Siano $\mathbf{v} = (a, b), \mathbf{v}_1 = (c, d), \mathbf{v}_2 = (e, f) \in \mathbb{R}^2$.

  Allora $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c + e, d + f) = 3a(c + e) + 9b(d + f) = 3ac + 9bd + 3ae + 9bf = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2$.

- Siano $\mathbf{v} = (x, y), \mathbf{w} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Allora $\mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w}) = (x, y) \cdot (\lambda(a, b)) = (x, y) \cdot (\lambda a, \lambda b) = 3\lambda xa + 9\lambda yb$ che è uguale

  sia a $= (\lambda x, \lambda y) \cdot (a, b) = (\lambda(x, y)) \cdot (a, b) = (\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$;
  che a $= \lambda(3xa + 9yb) = \lambda((x, y) \cdot (a, b)) = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$.

- Siano $\mathbf{v} = (x, y), \mathbf{w} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

  Allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (x, y) \cdot (a, b) = 3xa + 9yb$ e $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (a, b) \cdot (x, y) = 3ax + 9by$. Queste due quantità sono uguali poiché in $\mathbb{R}$ vale la proprietà commutativa.

- Sia $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

  Allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (x, y) \cdot (x, y) = 3x^2 + 9y^2$. Osserviamo che si tratta della somma di due quadrati, quindi è sempre positiva ed in $\mathbb{R}$ si annulla se e solo se $x = y = 0$ ossia se e solo se $\mathbf{v} = (0, 0)$.

Le proprietà del prodotto scalare sono quindi tutte verificate.

Due vettori ortonognali rispetto a questo prodotto scalare sono, ad esempio, $\mathbf{v} = (1, -2/3)$ e $\mathbf{w} = (1, 2/3)$. Essi sono rappresentati in Figura 8.5: non essendo ortogonali rispetto al prodotto scalare standard, non risultano "visivamente perpendicolari" rispetto al concetto standard di perpendicolarità.

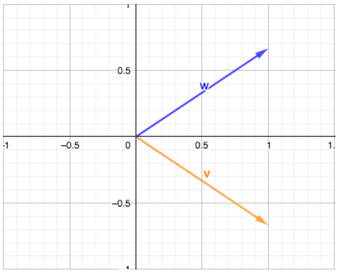

Figura 8.5: Esercizio 8.6.31. Vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare $(x, y) \cdot (a, b) = 4xa + 9yb$.

Esercizio 8.6.38 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare h affinché A sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tale h calcolare la matrice P che diagonalizza A.

Soluzione Esercizio: L'unico h affinché A sia ortogonalmente diagonalizzabile è $h = 1$.

Gli autovalori di A, scritti approssimati alla quarta cifra decimale sono: $-0.7321, 0, 2.7321$. La matrice P cercata è costituita da una base di autovettori di A ortonormali (in colonna); anche per P scriviamo l'approssimazione alla quarta cifra decimale:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3251 & 0.7071 & 0.6280 \\ -0.8881 & -0.0000 & 0.4597 \\ 0.3251 & -0.7071 & 0.6280 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8.6.39 Trovare una base ortonormale di autovettori per la seguente applicazione lineare (se possibile):

$$f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y - z, -y + 3z).$$

Soluzione Esercizio: Gli autovalori scritti in approssimazione alla quarta cifra decimale sono $t_1 = 0.5858$, $t_2 = 1$, $t_3 = 3.4142$. Una base di autovettori ortonormali la troviamo nella seguente matrice in cui la i-esima colonna rappresenta un autovettore relativo a t_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.9239 & 0 & -0.3827 \\ -0.3827 & 0 & 0.9239 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8.6.40 Trovare se possibile $h \in \mathbb{R}$ tale che la seguente applicazione lineare ammetta una base ortonormale di autovettori:

$$f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y, h, z).$$

Scrivere poi la base di autovettori.

Soluzione Esercizio: NB: Nel testo del libro c'è un errore di battitura: la funzione in questione è la seguente

$$f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y, hx, z).$$

La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente l'unico h possibile è $h = -1$.

Gli autovettori di tale f con questa scelta di h sono $t_1 = -0.6180$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1.6180$. Una base di autovettori è data dalle colonne della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} -0.5257 & 0 & -0.8507 \\ -0.8507 & 0 & 0.5257 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$