Capitolo 9

Geometria analitica nello spazio

Soluzioni Esercizi

Esercizio 9.5.1 Scrivere l'equazione del piano passante per i punti $A:(0,1,0)$, $B:(2,1,0)$ e $C:(0,1,1)$.

Soluzione Esercizio: L'equazione generica di un piano in $\mathbb{R}^3$ è : $ax+by+cz+d=0$, dove $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Affinché un piano passi per i punti A,B,C occorre che essi verifichino l'equazione stessa del piano, ossia il seguente sistema lineare deve essere verificato:

$$\begin{cases} 0\cdot a+1\cdot b+0\cdot c+d=0 \\ 2\cdot a+1\cdot b+0\cdot c+d=0 \\ 0\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+d=0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} b+d=0 \\ 2a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases}$$

quindi $a=0$, $b=-d$, $c=0$, perciò l'equazione del piano diventa $dy+d=0$. Ovviamente questa equazione rappresenta il medesimo piano per ogni $d\neq 0$, quindi possiamo assegnare a d un qualunque valore a nostra scelta purché diverso da 0; scegliamo $d=1$ per semplicità , quindi il piano cercato ha equazione cartesiana: $y=1$.

Esercizio 9.5.2 Scrivere l'equazione del piano π passante per il punto $A:(2,1,-1)$ e parallelo al piano π' definito dall'equazione cartesiana $x-3y+z-1=0$.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

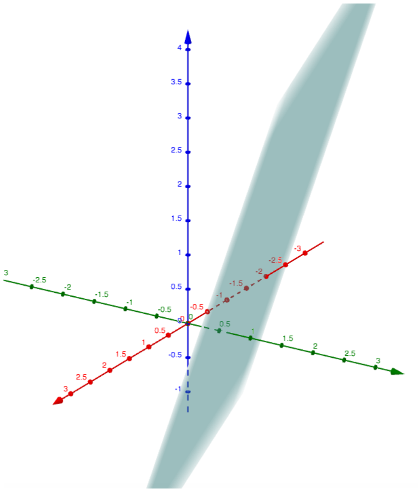

Figura 9.1: Esercizio 9.5.3.

Esercizio 9.5.3 Disegnare il piano dell'esercizio precedente.

Soluzione Esercizio: Si veda Figura **??**.

Esercizio 9.5.4 Scrivere l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta $x = y = z - 1$ e il punto $P : (5, 1, 1)$.

Soluzione Esercizio: Il fascio proprio di piani incidente nella retta data ha equazione $\alpha(x-y)+\beta(y-z+1) = 0$. Tutti i piani rappresentati da questa equazione al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ contengono la retta data. Ora dobbiamo selezionare quell'unico piano che contiene P. Per farlo imponiamo il passaggio di un piano del fascio per P:

$\alpha(5-1)+\beta(1-1+1) = 0$ quindi $\beta = -4\alpha$. Otteniamo quindi che il piano cercato è rappresentato da $\alpha(x-y) - 4\alpha(y-z+1) = 0$ per ogni $\alpha \neq 0$. Scegliamo $\alpha = 1$ e otteniamo $x - 5y + 4z - 4 = 0$.

Esercizio 9.5.5 Scrivere l'equazione del piano π passante per i punti $A : (3, 0, 1)$, $B : (2, 2, 2)$ e parallelo alla direzione individuata dal vettore $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 1, 0)$.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 9.5.6 Scrivere l'equazione del piano π passante per i punti $P : (1, 1, 1)$, $Q : (2, 1, 2)$ e parallelo alla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} .$$

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 9.5.7 Determinare la distanza tra i piani π e π', di equazioni rispettive $x - y + 4z = 0$ e $x - y + 4z - 9 = 0$.

Soluzione Esercizio: Osserviamo innanzitutto che i due piani sono paralleli. Dopodiché è sufficiente scegliere un punto qualunque di uno dei due piani e calcolarne la distanza dall'altro. Scegliamo ad esempio l'origine nel primo piano la cui distanza dal secondo è $\frac{|-9|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 9.5.8. Disegnare i piani dell'esercizio precedente.

Soluzione Esercizio: Si veda Figura **??**.

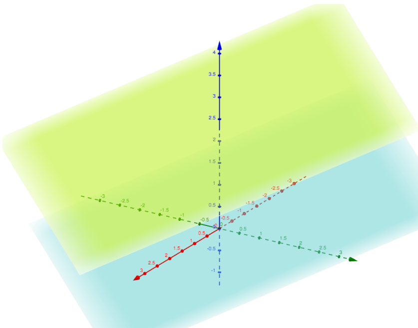

Figura 9.2: Esercizio 9.5.8.

Esercizio 9.5.9 Scrivere l'equazione del piano assiale al segmento di estremi $A : (1, 0, 1)$ e $B : (2, 2, 0)$ (Il piano assiale passa per il punto medio del segmento AB ed è a esso perpendicolare).

Soluzione Esercizio: Il punto medio del segmento AB è $M = \frac{(1+2, 0+2, 1+0)}{2} = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$. La retta congiungente A e B ha vettore direttore $\mathbf{v} = (1 - 2, 0 - 2, 1 - 0) = (-1, -2, 1)$. Il piano cercato per essere perpendicolare ad AB dovrà essere del tipo $-x - 2y + z + d = 0$. Imponiamo il passaggio per M per trovare d: $\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2} + d = 0$, da cui $d = 3$. Perciò il piano cercato ha equazione $-x - 2y + z + 3 = 0$.

Esercizio 9.5.10 Si considerino i punti $A : (1, 1, 1)$, $B : (0, 1, 0)$, $C : (0, 2, 1)$, $D : (0, 0, 0)$. Stabilire se siano complanari.

Soluzione Esercizio: I punti A, B, C, D sono complanari se e solo se lo sono i vettori che li congiungono. In particolare questo è ancora vero se scegliamo quelli congiungenti uno di loro con tutti gli altri. Per semplità scegliamo i vettori
$\overrightarrow{AD} = (1, 1, 1)$; $\overrightarrow{BD} = (0, 1, 0)$; $\overrightarrow{CD} = (0, 2, 1)$.
Ora questi vettori sono complanari se e solo se il seguente determinante si annulla:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Non è difficile verificare che tale determinante è uguale a 1, quindi i quattro punti dati non sono complanari.

Esercizio 9.5.11 Siano date le rette

$$r : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases} .$$

Scrivere le equazioni parametriche di r e le equazioni cartesiane di s.

Soluzione Esercizio: Iniziamo con le equazioni parametriche di r. Dalla seconda equazione si deduce che $x = y + 1$, che sostituito nella prima dà $2y + z + 2 = 0$. Quindi il sistema delle equazioni cartesiane di r può essere riscritto:

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ z = -2y - 2 \end{cases} .$$

Se rinominiamo la variabile y con t otteniamo le equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = -2t - 2 \end{cases} .$$

Per le equazioni cartesiane di s operiamo esattamente a ritroso rispetto a quanto appena fatto nel caso di r, ossia eliminiamo il parametro t da una delle tre equazioni a nostra scelta. Osserviamo che dalla terza otteniamo banalmente che $t = z$ quindi sostituendolo nelle altre due abbiamo:

$$\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - 3z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 9.5.12 Scrivere le equazioni della retta congiungente i punti $A : (1, 1, 1)$ e $B : (2, 3, 5)$.

Soluzione Esercizio: Il vettore direttore della retta data è $(1 - 2, 1 - 3, 1 - 5) = (-1; -2; -4)$. Quindi le equazioni parametriche della retta cercata sono:

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = -4t + 1 \end{cases} .$$

Esercizio 9.5.13 Scrivere le equazioni di una retta r che passi per il punto $Q : (1, -1, 0)$, e sia parallela al piano $\pi :\ 2x - y + 4 = 0$.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 9.5.14 Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P : (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ e parallelo al piano di equazione $x - z + 1 = 0$.

Soluzione Esercizio: I piani paralleli al piano dato hanno equazione $x - z + d = 0$. Per trovare il valore di d nel caso cercato imponiamo il passaggio per P: $1 - 0 + d = 0$, quindi $d = -1$. Perciò il piano cercato ha equazione $x - z - 1 = 0$.

Esercizio 9.5.15 Determinare la retta r passante per i punti $A : (1, 2, 3)$ e $B : (0, -4, 1)$.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 9.5.16 Scrivere le equazioni della retta r passante per il punto $P : (1, 0, 0)$ e ortogonale al piano π descritto in forma parametrica dalle seguenti equazioni:

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + t_1 \\ y = t_2 \\ z = 3 + t_1 \end{cases} .$$

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 9.5.17 Sia r la retta così definita:

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = -2 - 2t \end{cases} ;$$

trovare una retta passante per il punto $B : (3, 1, -2)$, sghemba con r e parallela al piano π:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - t_1 + t_2 \\ y = 3t_2 \\ z = -t_1 - 2t_2 \end{cases} .$$

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 9.5.18 Date le rette $r,\ r' \subset \mathbb{R}^3$ così definite:

$$r : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e } r' : \begin{cases} x = 1 + kz \\ y = 0 \end{cases} ,$$

determinare la loro posizione reciproca (sghembe, parallele, incidenti) al variare di k.

Soluzione Esercizio: Vedi Libro.

Esercizio 9.5.19 Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P : (1, 2, 0)$ e contenente la retta r definita dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Soluzione Esercizio: Il fascio di piani incidente nella retta r ha equazione $\alpha(x + y) + \beta(2x + z + 1) = 0$. Imponiamo il passaggio per P:

$\alpha(1+2)+\beta(2+0+1)=0$ e otteniamo $\alpha=-\beta$. Quindi il piano cercato ha equazione $x-y+z+1=0$.

Esercizio 9.5.20 Scrivere l'equazione della retta r passante per Q : $(1/2,-3,0)$, parallela al piano di equazione cartesiana $2x-y+1=0$ e incidente alla retta s:

$$s:\begin{cases} x=y \\ y=z+2 \end{cases}.$$

Soluzione Esercizio: Affinché la retta r sia parallela al piano dato occorre che il suo vettore direttore $\mathbf{v}_r=(v_1;v_2;v_3)$ sia ortogonale al vettore $(2,-1,0)$, cioè si avrà : $2v_1-v_2=0$, perciò $\mathbf{v}_r=(v_1,2v_1,v_3)$. Ora affinché r ed s siano incidenti è sufficiente richiedere che $\mathbf{v}_r$, il vettore direttore $\mathbf{v}_s$ della retta s e un vettore qualunque congiungente un punto di r ed uno di s siano complanari. Il vettore $\mathbf{v}_s$ è $(1,1,1)$, un punto di s è ad esempio $P=(2,2,0)$; come punto di r prendiamo Q. Ora vogliamo che $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_s$ e PQ siano complanari, quindi si deve avere:

$$\det\begin{pmatrix} v_1 & 2v_1 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3/2 & -5 & 0 \end{pmatrix}=0$$

da cui otteniamo $5v_1+3v_1-5v_3-3/2v_3=0$ e quindi $v_1=13/16v_3$. Da quest'ultima relazione otteniamo che il vettore direttore di r è della forma $(13/16v_3;13/8v_3;v_3)$. Uno qualunque di questi vettori con $v_3\neq0$ funge da vettore direttore per r, scegliamo per semplcitià $v3=16$ e otteniamo $\mathbf{v}_r=(13,26,16)$. Possiamo ora scrivere le equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x=13t+\frac{1}{2} \\ y=26t-3 \\ z=16t \end{cases}.$$

Esercizio 9.5.21 Stabilire se le rette $r:\begin{cases} y=1 \\ z=3 \end{cases}$ e $s:\begin{cases} x=1 \\ -y+z-1=0 \end{cases}$ sono incidenti, parallele o sghembe.

Soluzione Esercizio: Studiamo il sistema dato dalle quattro equazioni:

$$\begin{cases} y=1 \\ z=3 \\ x=1 \\ -y+z-1=0 \end{cases}.$$

Osserviamo banalmente che il punto $(1,1,3)$ è l'unico punto che soddisfa le prime 3 equazioni, ma non soddisfa l'ultima, quindi di sicuro le due rette non sono incidenti. Potremmo continuare studiando il rango delle matrici associate a quest'ultimo sistema ma è banale osservare che la retta r ha come vettore direttore $(1,0,0)$, mentre la retta s ha come vettore direttore $(0,1,1)$ (in entrambi i casi basta porre $z=t$ come parametro e ricavare le equazioni parametriche). Questi due vettori non sono paralleli, quindi le due rette non possono essere nemmeno parallele, perciò sono sghembe.

Esercizio 9.5.22. Disegnare le rette dell'esercizio precedente.

Soluzione Esercizio: Si veda Figura **??**: la retta r è colorata di nero, la retta s è colorata di viola.

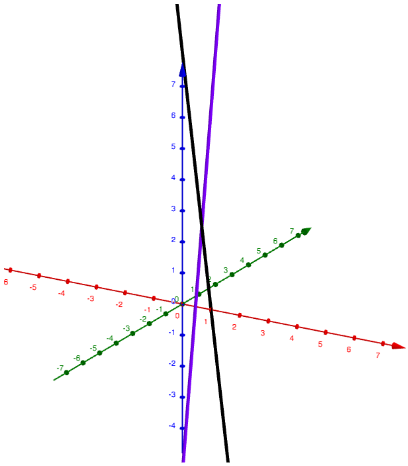

Figura 9.3: Esercizio 9.5.22.

Esercizio 9.5.23 Stabilire per quali valori del parametro reale h le rette

$$r : \begin{cases} x - 2hy + 3z = 0 \\ hx + y = 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x + hy = 2 \\ y - hz = 0 \end{cases}$$

sono parallele e determinare se siano disgiunte o coincidenti.

Soluzione Esercizio: La matrice completa associata al sistema che si ottiene mettendo assieme i due sistemi dati è :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2h\ 30 & & \\ h & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -h & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è $4h(1-h)(1+h)$ che si annulla per $h = 1$, $h = 0$, $h = 1$. Quindi per $h \neq -1, 0, 1$ le due rette sono sghembe.

Se $h = -1$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2h\ 30 & & \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ed ha rango 3. La matrice dei soli coefficienti è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ed ha rango 2, quindi se $h = -1$ le due rette sono parallele.

Se $h = 0$ la matrice completa diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ed ha rango 3, esattamente come la matrice dei soli coefficienti, quindi le due rette nel caso $h = 0$ sono incidenti.

Se $h = 1$ la matrice completa diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ed ha rango 3, mentre la matrice dei soli coefficienti ha rango 2 quindi le due rette nel caso $h = 1$ sono parallele.

Esercizio 9.5.24 Scrivere le equazioni della retta r che passa per il punto $P : (1, 1, 1)$, è perpendicolare alla retta s di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

ed è parallela al piano π di equazione $x + 3y = 0$.

Soluzione Esercizio: Affinché r sia perpendicolare a s occorre che il vettore $\mathbf{v}_r = (l, m, n)$ di r sia ortogonale a $(1, 2, 3)$, quindi si deve avere $(l, m, n)\cdot(1, 2, 3) = 0$, da cui $l+2m+3n = 0$, quindi $l = -2m-3n$, perciò $\mathbf{v}_r = (-2m-3n, m, n)$. Per essere poi parallela al piano dato occorre che $\mathbf{v}_r$ sia ortogonale anche a $(1, 3, 0)$, quindi: $(-2m-3n, m, n)\cdot(1, 3, 0) = 0$, da cui $-2m - 3n + 3m = 0$ perciò $m = 3n$. Otteniamo quindi che $\mathbf{v}_r = (-9n, 3n, n)$, quindi la retta r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 - 9t \\ z = 1 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}.$$

Esercizio 9.5.25 Scrivere le equazioni della retta incidente e perpendicolare ad entrambe le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \tau \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}.$$

Calcolare la distanza minima tra r e s.

Soluzione Esercizio: La retta cercata per essere perpendicolare a r e a s dovrà avere il vettore direttore (l, m, n) tale che

$$\begin{cases} (l, m, n) \cdot (0, 0, 1) = 0 \\ (l, m, n) \cdot (1, 2, 2) = 0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} n) = 0 \\ l + 2m + 2n = 0 \end{cases}$$

da cui $(l, m, n) = (-2m, m, 0)$. Quindi come vettore direttore della retta cercata possiamo prendere $(-2, 1, 0)$. La nostra retta al momento ha equazioni:

$$\begin{cases} x = -2m + a \\ y = m + b \\ z = c \end{cases}$$

Ora per imporre che sia incidente con r possiamo imporre che passi per un punto di r quindi che $(a, b, c) = (1, 0, \tau)$. Perciò la retta cercata diventa:

$$\begin{cases} x = -2m + 1 \\ y = m \\ z = \tau \end{cases}$$

Ora vogliamo imporre che sia incidente anche con s quindi chiediamo che

$$\begin{cases} t = -2m + 1 \\ 2t = m \\ 2t = \tau \end{cases}$$

da cui $m = 2/5$, $t = 1/5$, $\tau = 2/5$. Quindi la retta cercata ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -2m + 1 \\ y = m \\ z = 2/5 \end{cases}$$

La distanza minima tra r ed s è chiaramente data dalla lunghezza del segmento sulla retta appena cercata di estremi i due punti di intersezione con r ed s. Per ottenere le equazioni precedenti abbiamo imposto che la retta cercata passasse per il punto di r: $(1, 0, \tau)$, poi abbiamo trovato che $\tau = 2/5$, quindi il punto di intersezione della nostra retta con r è $(1, 0, 2/5)$. Per trovare il punto di intersezione tra la nostra retta ed s è sufficiente che risostituiamo i parametri trovati in precedenza: $m = 2/5$, $t = 1/5$, $\tau = 2/5$ nelle equazioni della nostra retta e troviamo il punto $(1/5, 2/5, 2/5)$. La distanza tra questi due punti è la distanza minima tra r ed s:
$\sqrt{(1 - 1/5)^2 + (0 - 2/5)^2 + (2/5 - 2/5)^2} = 2\sqrt{5}/5$.

Esercizio 9.5.26 Stabilire se le seguenti rette sono complanari o sghembe:

$$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} 2x = y \\ y = z \end{cases} .$$

Soluzione Esercizio: Studiamo il sistema:

$$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \\ 2x = y \\ y = z \end{cases} .$$

La matrice completa associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix},$$

è semplice verificare che ha rango 4, quindi le due rette date sono sghembe.

Esercizio 9.5.27 Siano date nello spazio le rette sghembe

$$r : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases} .$$

Determinare un piano parallelo ad entrambe.

Soluzione Esercizio: Scriviamo le due rette in forma parametrica per evidenziare il vettore direttore:

$$r : \quad \begin{cases} x = t/2 \\ y = t \\ z = 2/5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2/3\tau \\ y = -1/3\tau + 1 \\ z = \tau \end{cases} .$$

Quindi i due vettori direttori sono rispettivamente $(1/2, 1, 1)$ e $(-2/3, -1/3, 1)$. Per semplicità scriviamo il piano in forma parametrica. I vettori direttori saranno i medesimi delle due rette e questo è sufficiente a risolvere questo esercizio, la scelta del punto di passaggio è del tutto arbitraria:

$$\begin{cases} x = t/2 - 2/3\tau + 10 \\ y = t - 1/3\tau - 20 \\ z = t + \tau + \sqrt{13} \end{cases}$$

Esercizio 9.5.28 Calcolare la distanza dal punto $P : (2, 0, 1)$ dal piano π di equazione:

$$3x - 7y - 5z - 1 = 0.$$

Soluzione Esercizio: La distanza è nulla in quanto il punto appartiene al piano.

Esercizio 9.5.29 Scrivere l'equazione del luogo dei punti dello spazio equidistanti dal piano $\pi : z = 1$ e dal punto $P : (2, 2, 0)$.

Soluzione Esercizio: Sia il punto del luogo cercato del tipo (a, b, c). La condizione da imporre è : $|c-1| = \sqrt{(a-2)^2 + (b-2)^2 + c^2}$. Quindi l'equazione cercata è :

$$c = \frac{1 - (a-2)^2 - (b-2)^2}{2}.$$

Esercizio 9.5.30 Siano dati i piani π, π' di equazioni rispettive $2x + y + z = 0$ e $x - z - 1 = 0$. Scrivere l'equazione del piano π'' simmetrico di π' rispetto a π.

Soluzione Esercizio: Iniziamo con l'osservare che i tre piani appartengono tutti al medesimo fascio di piani incidenti in una retta che chiameremo r. Osserviamo inoltre che un vettore perpendicolare a π è $\mathbf{v}_\pi = (2, 1, 1)$ e un vettore perpendicolare a π' è $\mathbf{v}_{\pi'} = (1, 0, -1)$. Chiaramente se π'' è simmetrico a π' rispetto a π, anche il vettore $\mathbf{v}_{\pi''}$ (perpendicolare a π'') sarà simmetrico a $\mathbf{v}_{\pi'}$ rispetto al piano contenente la retta r e con l'altro vettore di giacitura dato da $\mathbf{v}_\pi$. In particolare l'angolo convesso tra $\mathbf{v}_\pi$ e $\mathbf{v}_{\pi'}$ e quello tra $\mathbf{v}_{\pi''}$ e $\mathbf{v}_\pi$ sono uguali. Chiamiamo tale angolo θ. Per le proprietà del prodotto scalare abbiamo che $\cos\theta = (\mathbf{v}_\pi \cdot \mathbf{v}_{\pi'})/|\mathbf{v}_\pi||\mathbf{v}_{\pi'}|$, ma anche che $\cos\theta = (\mathbf{v}_\pi \cdot \mathbf{v}_{\pi''})/|\mathbf{v}_\pi||\mathbf{v}_{\pi''}|$ Quindi abbiamo che

$$\frac{\mathbf{v}_\pi \cdot \mathbf{v}_{\pi'}}{|\mathbf{v}_{\pi'}|} = \frac{\mathbf{v}_\pi \cdot \mathbf{v}_{\pi''}}{|\mathbf{v}_{\pi''}|}.$$

In questa uguaglianza di ignoto c'è solo $\mathbf{v}_{\pi''}$. Di pi'' per ora sappiamo solo che appartiene al medesimo fascio di piani di π e π', quindi sarà del tipo:

$$2x + y + z + \alpha(x - z - 1) = 0$$

ossia

$$(2 + \alpha)x + y + (1 - \alpha)z - 1 = 0.$$

Quindi $\mathbf{v}_{\pi''} = (2 + \alpha, 1, 1 - \alpha)$. La condizione prima trovata impone che $\mathbf{v}_{\pi''}$ sia simmetrico a π' rispetto a π:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha + 6}{\sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha + 6}}$$

o equivalentemente:

$$\alpha^2 + \alpha + 3 = (\alpha + 6)^2$$

da cui

$$\alpha = -3.$$

Quindi

$$\pi'' = -x + y + 4z + 3 = 0.$$

Esercizio 9.5.31 Si consideri il sistema

$$\begin{cases} (h+1)x + y - h - 2 = 0 \\ y + hz - 1 = 0 \end{cases}$$

dove $h \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che $\forall\ h \in \mathbb{R}$, il sistema rappresenta una retta nello spazio;

2. detta $\mathcal{F}_h$ la famiglia di rette data dal sistema al variare di h, determinare una retta di $\mathcal{F}_h$ la cui direzione sia perpendicolare alla retta $r : 3x = -3y = -2z$.

Soluzione Esercizio:

1. Le due equazioni del sistema rappresentano ciascuna un piano nello spazio. Per verificare che il sistema individui una retta bisogna solo controllare che i due piani non siano paralleli, ossia che i loro vettori direzione non siano proporzionali:

$(h+1, 1, 0) \neq \alpha(0, 1, h), \quad \forall \alpha, h \in \mathbb{R}$.

Questo è ovvio in quanto affinché ci sia l'uguaglianza sulla seconda coordinata α deve essere uguale a 1, mentre per avere l'uguaglianza sulla terza coordinata $h = 0$, ma questo contraddice l'uguaglianza delle prime coordinate dove dovremmo avere $h = -1$.

2. Scriviamo le rette di $\mathcal{F}_h$ in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -(h+1)t + h + 2 \\ z = \frac{h+1}{h}t - 1 - \frac{1}{h} \end{cases} .$$

Il vettore direttore di delle rette di $\mathcal{F}_h$ è quindi del tipo $(1, -(h+1), \frac{h+1}{h})$. L'equazione parametrica di r invece è:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases} .$$

Affinché la retta di $\mathcal{F}_h$ sia perpendicolare a r occorre che

$$(1, -(h+1), \frac{h+1}{h}) \cdot (-1, 1, \frac{3}{2}) = 0,$$

quindi: $-1 - (h+1) + \frac{3(h+1)}{2h} = 0$, da cui $h = -\frac{3}{2}$ o $h = 1$.

Esercizio 9.5.32 Si consideri la famiglia di rette $\mathcal{F}_h$ dell'esercizio precedente

1. stabilire se esistono rette di $\mathcal{F}_h$ ortogonali al piano π di equazione
$$x - 2y + 2z - 3 = 0;$$
2. verificare che le tutte rette di $\mathcal{F}_h$ passano per uno stesso punto V. Determinare V.

Soluzione Esercizio:

1. Nella soluzione dell'esercizio precedente avevamo trovato che il vet- tore direttore delle rette di $\mathcal{F}_h$ è del tipo $(1, -(h+1), \frac{h+1}{h})$.

Affinché esso sia perpendicolare al piano dato occorre che esista un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che$(1, -(h+1), \frac{h+1}{h}) = \alpha(1, -2, 2)$. Non è difficile controllare che questo si verifica per $h = \alpha = 1$.

2. Consideriamo la retta $\mathcal{F}_0$:
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases},$$
e la retta $\mathcal{F}_{-1}$:
$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases},$$
ottenute ponendo $h = 0, -1$, rispettivamente. Esse si intersecano nel punto $(1, 1, 0)$. Ora è sufficiente controllare che tale punto appartenga a tutte le rette di $\mathcal{F}_h$: per farlo basta sostituire le coordinate del punto appena trovato nel sistema
$$\begin{cases} (h+1)x + y - h - 2 = 0 \\ y + hz - 1 = 0 \end{cases},$$
Otteniamo:
$$\begin{cases} (h+1) + 1 - h - 2 = 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{cases},$$
che è banalmente verificato per ogni $h \in \mathbb{R}$. Quindi $V = (1, 1, 0)$.

Esercizio 9.5.33 Si considerino la famiglia di piani
$$\mathcal{F} : (k^2 - 2k + 2)x + (2 - k)y + z - 1 = 0$$
al variare di k, e la retta $r : 2x = 2y = -z$.

1. Determinare i piani di $\mathcal{F}$ paralleli a r.
2. Determinare i piani di $\mathcal{F}$ perpendicolari a r.

Soluzione Esercizio:

1. Il vettore $(k^2 - 2k + 2, 2 - k, 1)$ è perpendicolare ai piani di $\mathcal{F}$. La retta r in forma parametrica diventa:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}.$$

Affinché un piano di $\mathcal{F}$ sia parallelo ad r occorre che
$(k^2 - 2k + 2, 2 - k, 1) \cdot (1, 1, -2) = 0$,
quindi che valga $k^2 - 2k + 2 + 2 - k - 2 = 0$, il che accade per $k = 1$ o $k = 2$.

2. Ora invece occorre che esista un $\alpha in \mathbb{R}$ tale che
$(k^2 - 2k + 2, 2 - k, 1) = \alpha(1, 1, -2)$.
Non esistono valori di α, k tali che questo si verifichi (dalla terza coordinata ricaviamo $\alpha = -2$; poi dalla seconda $k = 4$, ma questi valori non soddisfano l'uguaglianza sulla prima coordinata).

Esercizio 9.5.34 Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x + y - hz = 0 \\ 2x + hz - 1 = 0 \end{cases} .$$

Trovare i valori di h in modo che r e s siano incidenti. In corrispondenza dei valori trovati scrivere l'equazione del piano contenente r e s.

Soluzione Esercizio: Scriviamo s in forma parametrica:

$$s : \begin{cases} x = -\frac{h}{2}\tau + \frac{1}{2} \\ y = h\tau + \frac{h}{2}\tau - \frac{1}{2} \\ z = \tau \end{cases} .$$

Un vettore direttore di r è $\mathbf{v}_r = (-1, 1, 1)$, un vettore direttore di s è $\mathbf{v}_s = (-h, 3h, 2)$. Un vettore congiungente le due rette è ad esempio $\mathbf{v} = (1, h, 0) - (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, h - \frac{1}{2}, 0)$. Chiediamo che questi tre vettori siano complanari:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -h & 3h & 2 \\ \frac{1}{2} & h - \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -h^2 + h = 0$$

da cui $h = 0$ o $h = 1$. Per questi due valori di h le due rette sono complanari. Per tali valori $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ non sono proporzionali, quindi le rette non sono parallele, quindi sono incidenti.

Il piano che contiene r ed s sarà parallelo a $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ e passerà per un punto qualunque di una di queste due rette. Determiniamolo tramite le sue equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -\tau + -ht + \frac{1}{2} \\ y = \tau + 3ht - \frac{1}{2} \\ z = \tau + 2t \end{cases}$$

ove $h = 1$ o $h = 0$.

Esercizio 9.5.35 Dati nello spazio il piano $kx + 2y - (3 + k)z + 41 = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} ;$$

determinare la posizione reciproca di piano e retta al variare di k e per quali valori di k, se esistono, si abbia che piano e retta siano tra loro perpendicolari.

Soluzione Esercizio: Un piano ed una retta nello spazio possono essere incidenti o paralleli, se sono paralleli o la retta è contenuta nel piano oppure non si incontrano affatto. Il piano e la retta sono paralleli se e solo se $(k, 2, -3-k) \cdot (3, 1, 2) = 0$ ossia se e solo se $k = 4$. Quindi se $k \neq 4$ retta e piano sono incidenti. Se k = 4 l'equazione del piano è $4x + 2y - 7z + 41 = 0$. Per stabilire la posizione reciproca di r e del piano in questo caso è sufficiente controllare se un qualunque punto di r appartiene o no al piano, infatti se contiene un punto li contiene tutti, se non contiene un punto qualunque non ne contiene nessuno.

Banalmente si ha che il punto $(0, 0, 0)$ appartiene alla retta, mentre non appartiene al piano, quindi per $k = 4$ retta e piano sono paralleli disgiunti.

Si avrà poi che r è perpendicolare al piano se il vettore $(3, 1, 2)$ della retta è parallelo (e quindi proporzionale) al vettore $(k, 2, -3-k)$ del piano. Ciò non piò accadere mai (si ha che $(3, 1)$ è parallelo a $(k, 2)$ solo per $k = 6$, ma la terza componente del vettore non risulta in quel caso proporzionale).

Esercizio 9.5.36 Trovare, se possibile, $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che i seguenti punti siano complanari: $P_1 : (0, 0, k)$, $P_2 : (1, k, 0)$, $P_3 : (k, 0, k)$ e $P_4 : (1, 1, k)$. Dopodiché, per uno di questi valori di k, trovare un piano parallelo a quello generato da $P_1, \ldots, P_4$ e passante per $Q = (1, 1, 1)$.

Soluzione Esercizio: Questi punti sono complanari se e solo se lo sono i loro vettori congiungenti: $P_1P_2 = (1, k, -k)$, $P_1P_3 = (k, 0, 0)$, $P_1P_4 = (1, 1, 0)$. Tali vettori sono complanari se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & k & -k \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ossia se e solo se $k = 0$. Per trovare il piano cercato è sufficiente considerare che è parallelo ai due vettori non nulli fra quelli di cui sopra. Ciò ci permette di scriverne le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \tau + t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 9.5.37 Sia dato il fascio di piani incidenti in

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} .$$

Trovare in esso il piano π passante per il punto $P : (0,0,2)$. Si determini poi il piano π' parallelo a π e passante per $Q : (2,4,0)$ e la retta r passante per Q e perpendicolare a π.

Soluzione Esercizio: Scriviamo la retta in forma cartesiana:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases} .$$

Il fascio di piani incidenti in r ha equazione:

$$\alpha(x+y-2)+\beta(y-z+1)=0.$$

Imponiamo il passaggio per P: $-2\alpha-\beta=0$, quindi $\beta=-2\alpha$, perciò il piano π, del fascio, passante per P ha equazione $x-y+2z-4=0$. I piani paralleli a π hanno equazione $x-y+2z+q=0$. Imponiamo il passaggio per Q e troviamo $q=2$, quindi π' ha equazione $x-y+2z+2=0$. La retta r ha equazioni:

$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=-t+4 \\ z=2t \end{cases} .$$

Esercizio 9.5.38. * Fare un esempio di due rette r, r' che siano incidenti e uno in cui r, r' siano parallele disgiunte. In entrambi i casi, determinare il piano che contiene le due rette. [Le rette possono essere date in forma parametrica o cartesiana, come si preferisce].

Soluzione Esercizio: Considerare le rette:

$$r: \quad \begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-35 \\ z=t \end{cases} \qquad r': \quad \begin{cases} x=3s+1 \\ y=\pi s-35 \\ z=15s \end{cases} .$$

Chiaramente le due rette non sono parallele, avendo vettori direzione: $\mathbf{v}_r=(2,3,1)$ e $\mathbf{v}_s=(3,\pi,15)$, che non sono proporzionali, ma passano entrambe per il punto $P=(1,-35,0)$, quindi sono incidenti. In forma parametrica, il piano che le contiene è :

$$\begin{cases} x=2t+3s+1 \\ y=3t+\pi s-35 \\ z=t+15s \end{cases} .$$

Come esempio di due rette parallele disgiunte possiamo considerare la stessa r di prima e la retta

$$r': \quad \begin{cases} x=2s \\ y=3s \\ z=s \end{cases} .$$

Le due rette sono parallele avendo lo stesso vettore direzione; per vedere che sono disgiunte possiamo notare che $(0,0,0)\in r'$, mentre r non passa per l'origine (si verifica ponendo $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nelle equazioni parametriche).

Il piano che le contiene deve passare per l'origine, per $(1, 2, 3)$ (punti di r') e per $(1, -35, 0) \in r$. Se l'equazione del piano è $ax+vy+cz+d = 0$, ciò implica:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ a - 35b = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} d = 0 \\ 3c = -35b - 2b = -37b \\ a = 35b \end{cases}.$$

Scegliendo $b = 3$, avremo $c = -37$, $a = 105$. Quindi il piano cercato è :

$$105x + 3y - 37z = 0.$$

Esercizio 9.5.39. * Fare un esempio di una rette r e un piano π che siano paralleli e disgiunti. Determinare poi la distanza fra retta e piano.

Soluzione Esercizio: Per esempio consideriamo il piano π di equazione $x + y + z - 3 = 0$, il vettore $\mathbf{v}_\pi = (1, 1, 1)$ è ad esso perpendicolare, quindi la retta:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$$

è parallela a π, poiché il suo vettore direzione $\mathbf{v}_r = (1.1. - 2)$ è perpendicolare a $\mathbf{v}_\pi$, infatti: $\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_\pi = 0$. Resta da vedere che r non sia contenuta in π: basta notare che r passa per l'origine, ma $(0, 0, 0)$ non soddisfa l'equazione di π, quindi retta e piano sono disgiunti.

Notiamo che la retta r' per l'origine perpendicolare a π ha equazioni:

$$r' : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = s \end{cases}$$

e $P = r' \cap \pi$ è dato da $s + s + s - 3 = 0$, cioè $s = 1$ e $P = (1, 1, 1)$; quindi la distanza del piano dalla retta r, pari a $\overline{OP}$, è $\sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$.

Esercizio 9.5.40. * Considerare la retta

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = t - 3 \end{cases}.$$

Lanciando tre dadi, sia $(a; b; c) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$ il risultato ottenuto, e consideriamo la retta:

$$r' : \begin{cases} x = as \\ y = bs \\ z = cs \end{cases}.$$

Dire se sia più probabile ottenere che:

- r e r' siano sghembe;
- r e r' siano incidenti;
- r e r' siano parallele disgiunte;
- $r = r'$.

Soluzione Esercizio: Per prima cosa possiamo notare che, qualunque siano a, b, c, la retta r' passa per l'origine, e la retta r no, quindi il quarto caso è impossibile.

Mettendo a sistema le due equazioni e considerando le matrici associate, avremo:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & -a & | & -1 \\ 2 & -b & | & -2 \\ 1 & -c & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Avremo r e r' sono parallele disgiunte se $r(A) = 1$, $r(A|B) = 2$; e $r(A) = 1$ se e solo se $(a, b, c) = (1, 2, 1)$, oppure $(2, 4, 2)$ o $(3, 6, 3)$.

Avremo invece che r e r' sono incidenti se $r(A) = r(A|B) = 2$. Per avere $r(A|B) = 2$ si deve avere $\det(A|B) = 0$, cioè (usando Sarrus): $-3b + 2a + 2c - b - 2c + 6a = -4b + 8a = 0$. Quindi $b = 2a$. Escludendo i casi visti prima, avremo che r e r' sono incidenti se:

$$(a, b, c) \in \{(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (2, 4, 1), (2, 4, 3),$$

$$(2, 4, 4), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (3, 6, 1), (3, 6, 2), (3, 6, 4), (3, 6, 5), (3, 6, 6)\}.$$

In tutto sono 15 casi. In tutti gli altri casi, r e r' sono sghembe. Poiché lanciando tre dadi gli esiti possibili sono $6 \times 6 \times 6 = 216$, si ha che la probabilità che r e r' siano parallele disgiunte è $3/216 = 1/72$; che siano r e r' siano incidenti è $15/215 = 5/72$, mentre che siano sghembe è $66/72 = 11/12$, molto maggiore degli altri casi.