Capitolo 11

Spazi Affini

Soluzioni Esercizi

Esercizio 11.4.1. Determinare la dimensione del sottospazio affine di $\mathbb{A}^4$ determinato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - t = 1 \\ x + y + z + t = 2 \\ 2x + y - 2z - 2t = -1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio: Il sottospazio affine è associato al sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$:

$$W = \begin{cases} 3x + 2y - z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + y - 2z - 2t = 0 \end{cases} .$$

Poiché

$$r \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2,$$

(verificarlo), si avrà che $\dim W = 4 - 2 = 2$, che è la dimensione cercata.

Esercizio 11.4.2. Dare un esempio di tre sottospazi affini di $\mathbb{A}^3$, diversi da tutto lo spazio e aventi dimensioni diverse fra loro.

Soluzione Esercizio: Possiamo considerare i seguenti sottospazi affini: $S_1 = \{(1, 2, 3)\}$;

$S_2 = \{(x, y, z) | x + y = 3, y - z = 1\}$;

$S_3 = \{(x, y, z) | x + y - z = 17\}$.

Si ha $\dim S_1 = 0$, $\dim S_2 = 1$, $\dim S_3 = 2$ (verificarlo usando i sottospazi vettoriali ad essi associati).

Esercizio 11.4.3. Esprimere (nel riferimento standard) il sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}^4$ dell'esempio 11.2.5 tramite un sistema del tipo $AX = B$

Soluzione Esercizio: Le equazioni parametriche si S sono:

$$\begin{cases} x = -t_1 + t_2 + 1 \\ y = t_1 - t_2 + 2 \\ z = t_1 + 3 \\ t = t_2 + 4 \end{cases}.$$

Dalle ultime due equazioni si ricava: $t_1 = 3 - z$, $t_2 = 4 - t$; sostituendo nelle prime due si ottengono equazioni cartesiane di S:

$$\begin{cases} x - z + t = 2 \\ y + z - t = 1 \end{cases}$$

che, date in forma matriciale, divengono:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 11.4.4. Determinare (con equazioni parametriche o come soluzioni di un sistema) il sottospazio affine $S_1 = \overline{P_0, P_1} \subset \mathbb{A}^4$, ove siano $P_0 = (0,1,1,0)$, $P_1 = (1,0,0,1)$. Determinare anche l'intersezione di S_1 con l'iperpiano $S_2 \subset \mathbb{A}^4$ definito dall'equazione (nel riferimento standard): $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$.

Soluzione Esercizio: S_1 è la retta affine passante per i punti P_0 e P_1; le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t + 1 \\ x_3 = t + 1 \\ x_4 = -t \end{cases}.$$

Per determinare $S_1 \cap S_2$ sostituiamo nell'equazione di S_2:

$$-t + t + 1 + t + 1 + t = 2, \quad 2t + 2 = 2, \quad t = 0.$$

Infatti, sostituendo $t = 0$, ritroviamo $S_1 \cap S_2 = \{P_0\}$.

Esercizio 11.4.5. Dimostrare che un sottospazio affine S di $\mathbb{A}^n$ è anche un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\mathbf{0} \in S$.

Soluzione Esercizio: Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ il sottospazio affine passante per $Q \in \mathbb{A}^n$ e parallelo a $W \subset \mathbb{R}^n$ (vedi Def. 11.2.1). Se $\mathbf{0} \in S$, allora $\overrightarrow{OQ} \in W$, e, come insiemi, $S = W$, quindi S è un sottospazio vettoriale.

Viceversa, se S è un sottospazio vettoriale, necessariamente $\mathbf{0} \in S$.

Esercizio 11.4.6. Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. W possiede anche la struttura di sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$?

Soluzione Esercizio: La risposta è affermativa, con $S = W$, e $Q = O$ (vedi l'esercizio precedente).

Esercizio 11.4.7. $\mathbb{A}^6$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^7$?

Soluzione Esercizio: NO, $\mathbb{A}^6$ non è nemmeno un sottoinsieme di $\mathbb{A}^7$!

Esercizio 11.4.8. * Siano $P_0, \dots, P_s \in \mathbb{A}^n$; considerare i sottospazi di $\mathbb{A}^n$: $S_1 = \overline{P_0, \dots, P_s}$ e $S_2 = \overline{P_0, \dots, P_{s-1}}$. Dire se le seguenti affermazioni siano vere o false (motivando la risposta).

1) S_2 è un sottospazio affine di S_1;
2) $\dim S_2 = \dim S_1 - 1$;
3) $\dim S_1 = s$.

Soluzione Esercizio:

1) Vero. S_2 è il sottospazio affine passante per P_0 e parallelo a $W_2 = \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, ..., \overrightarrow{P_0P_{s-1}} \right\langle$, mentre S_1 è passante per P_0 e parallelo a $W_1 = \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, ..., \overrightarrow{P_0P_s} \right\langle$ e $W_2 \subset W_1$.

2) Falso. E' vero solo se $\overrightarrow{P_0P_s} \notin W_2$, ma se $\overrightarrow{P_0P_s} \in W_2$ si avrà $S_1 = S_2$.

3) Falso, è vero solo se $P_0, \dots, P_s$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 11.4.9. Sia S un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$ definito (nel riferimento standard) dal sistema $AX = B$. Dimostrare che codimensione di S è pari al rango di A.

Soluzione Esercizio: Lo spazio S risulta parallelo al sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^n$ definito da $AX = O$; si ha (per Rouché-Capelli) che $\dim S = \dim W = n - r(A)$, quindi codim $S = r(A)$.

Esercizio 11.4.10. Abbiamo visto che se $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ è un'affinità associata all'identità $id_{\mathbb{R}^n}$, allora $\forall P, Q \in \mathbb{A}^n$, avremo $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}$. Si dimostri che ciò implica anche che il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{Qf(Q)}$ sia indipendente dalla scelta di P e di Q (e quindi $f = t_{\mathbf{v}}$).

Soluzione Esercizio: Consideriamo la somma: $\overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{Pf(Q)}$ (per la Def. 11.1.1.2)) e la somma: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{Pf(Q)}$. I due risultati sono uguali, ma anche $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}$, quindi si ha: $\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{Qf(Q)}$, qualsiasi siano P e Q.

Esercizio 11.4.11. Sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$; esso ha anche una struttura di sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$?

Soluzione Esercizio: Per un errore di stampa, questo esercizio è lo stesso dell' 11.4.6.