

GIANNI CESINI
GIOVANNI LATINI
FABIO POLONARA

Fisica tecnica

seconda edizione



EDIZIONE DIGITALE SU
PANDORA
CAMPUS



CittaStudi
EDIZIONI

APPROFONDIMENTI

Capitolo 14

a cura di:

Gianni Cesini
Giovanni Latini
Fabio Polonara

INTRODUZIONE ALLA TERMOFLUIDODINAMICA LA CONVEZIONE TERMICA

14.2.3.3

MODELLI PER FLUIDI NON NEWTONIANI

Le sostanze che non soddisfano l'equazione (14.17) e che quindi vengono dette fluidi non-newtoniani sono numerose e molto diversificate. In questa categoria ricadono fluidi biologici (sangue, muchi, saliva, liquido sinoviale), prodotti farmaceutici (unguenti, emulsioni ecc.), fluidi derivati da generi alimentari (succhi, salse ecc.), sostanze naturali e prodotti industriali, come lava, malte fluide, fanghi di trivellazione, vernici, colle, grassi lubrificanti, sostanze polimeriche fuse, liquami fognari e molte altre ancora.

In generale, sono sostanze chimicamente complesse: soluzioni di polimeri o molecole complesse, miscele di idrocarburi, sistemi multifase in cui particelle liquide, gassose e, a volte, solide si trovano disperse in un liquido. Come si evince facilmente dall'elenco riportato sopra, peraltro non esaustivo, i fluidi non-newtoniani sono sostanze importanti per numerose applicazioni in campo industriale, chimico, farmacologico, alimentare e biomedico. È quindi evidente l'importanza di modelli che descrivano in modo il più accurato possibile il comportamento fluidodinamico di queste sostanze.

Per i fluidi non-newtoniani la viscosità non è una costante dipendente solo dal tipo di fluido ed, eventualmente dalla temperatura e dalla pressione: in questo caso il rapporto tra (τ) e ($\partial w / \partial y$) in ogni punto di misura è chiamato viscosità apparente (μ_{app}), che non è costante ma dipende dal valore del gradiente di velocità nel punto considerato.

Per i fluidi non-newtoniani esistono diversi modelli per la determinazione dello sforzo viscoso in funzione del gradiente di velocità.

Un primo modello riguarda la classe dei cosiddetti **fluidi a legge di potenza** (*power law fluids*) per i quali si ha

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^n$$

per i quali

$$\mu_{app} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^{n-1}$$

Altre classi di fluidi non-newtoniani tendono inizialmente a resistere alla deformazione, fino a quando lo sforzo (τ) non diventa maggiore di un valore limite detto **tensione di snervamento** (*yield stress*) (τ_y).

Pertanto per questi fluidi la curva che esprime la relazione tra sforzo viscoso e gradiente di velocità non passa per l'origine. Se tale relazione è di tipo lineare si ha il modello di fluido plastico di Bingham, per il quale si ha

$$\tau = \tau_y + \mu_b \frac{\partial w}{\partial y}$$

dove (τ_y) è lo *yield stress* e (μ_b) è la viscosità plastica.

Per i fluidi che, oltre ad avere una tensione di snervamento (τ_y), hanno anche una relazione non lineare tra sforzo viscoso (τ) e gradiente di velocità ($\partial w/\partial y$) si può utilizzare il modello di **fluido di Casson**:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + K_c \sqrt{\frac{\partial w}{\partial y}}$$

In molte **applicazioni mediche e dell'ingegneria biomedica** è importante determinare quale modello deve essere utilizzato per il **sangue**. Sulla base di studi sperimentali si ricava che il modello di fluido newtoniano si può applicare con buona approssimazione nelle grandi arterie in cui il gradiente di velocità è alto ($>100 \text{ s}^{-1}$). In questo caso un range di valori normalmente accettati per la viscosità dinamica del sangue è 3-4 cPoise ($3 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$).

Nella microcircolazione (piccoli vasi sanguigni e capillari) il sangue deve essere trattato come un fluido non-newtoniano. In questo caso il modello più utilizzato è quello di fluido di Casson.

14.2.3.5 L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA. LA LEGGE DI BERNOULLI. PERDITE DI CARICO IN UN CIRCUITO IDRAULICO

Nel paragrafo 6.5.2 è stato utilizzato il primo principio della termodinamica applicato a un sistema aperto senza scambio di calore con l'esterno per ricavare l'**equazione dell'energia meccanica** (6.17):

$$\dot{L}' = \dot{m} \left[- \int_1^2 v dp - g \Delta z - \frac{\Delta w^2}{2} \right] - \dot{R} \quad [\text{W}] \quad (14.24)$$

che mette in relazione il lavoro utile (\dot{L}') scambiato nell'unità di tempo da una macchina motrice (ad esempio una turbina) o una macchina operatrice (ad esempio una pompa o un ventilatore) con le variazioni fra sezione di uscita e sezione di ingresso delle proprietà del sistema:

- v = volume specifico del fluido [$\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}$]
- p = pressione del fluido [N m^{-2}]
- w = velocità del fluido [m s^{-1}]

Nell'equazione si ha inoltre:

- \dot{m} = portata massica di fluido [kg s^{-1}]
- Δz = variazione di quota tra sezione di uscita e sezione di ingresso [m]
- \dot{R} = energia dissipata nell'unità di tempo a causa delle irreversibilità del processo [W]

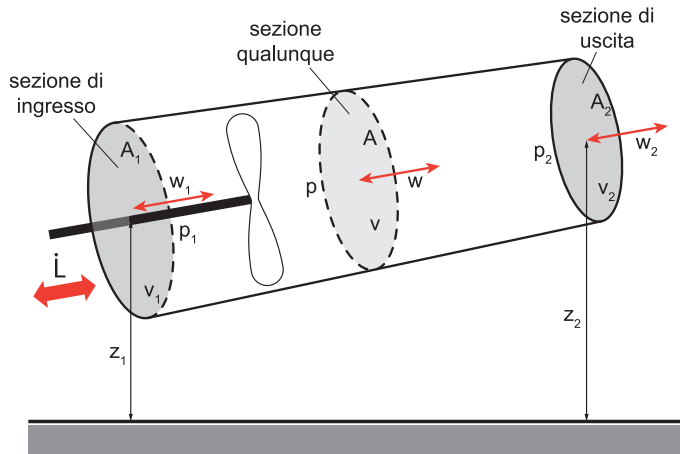


Figura 14.6
Schematizzazione di un tratto di condotto come sistema termodinamico aperto

Se applichiamo all'equazione (14.24) le seguenti ipotesi:

1. Il fluido contenuto nel condotto non scambia lavoro con l'esterno $\rightarrow \dot{L} = 0$
2. Il moto del fluido sia stazionario e monodimensionale
3. Il fluido sia incomprimibile $\rightarrow v = \text{costante} \rightarrow \rho = \text{costante}$
4. Il fluido sia non-viscoso e non vi siano altre cause di irreversibilità all'interno del sistema $\rightarrow \dot{R} = 0$

si ottiene:

$$v \int_1^2 dp + g \Delta z + \frac{\Delta w^2}{2} = 0$$

che applicata al condotto di figura 14.6 in cui non sia presente la macchina in grado di scambiare lavoro con l'esterno (ipotesi n. 1) e ricordando che $(v=1/\rho)$, dove (ρ) è la densità del fluido in [kg^{-3}], diventa:

$$\frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) + \frac{(w_2^2 - w_1^2)}{2} = 0$$

ovvero

$$p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho w_2^2 = p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2$$

Pertanto, se sono verificate con approssimazione accettabile le ipotesi sopra riportate in ogni sezione del condotto si ha:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho w^2 = \text{costante} \quad (14.25)$$

che è l'**equazione di Bernoulli** (detta anche principio di Bernoulli o teorema di Bernoulli) già ricavata nel paragrafo 6.5.2.2.

Si noti che tutti i termini nell'equazione (14.25) hanno le dimensioni di una pressione $[\text{N m}^{-2}]$:

- il primo termine (p) è la **pressione statica**, ovvero la pressione termodinamica che si può misurare spostandosi solidamente con il fluido;
- il secondo termine ($\rho g z$) è la pressione **geodetica o potenziale**, ovvero la variazione di pressione, rispetto alla pressione statica, dovuta alla variazione di energia potenziale e quindi di quota del fluido;
- il terzo termine (ρw^2) è la **pressione dinamica**, ovvero la variazione di pressione dovuta alla variazione di energia cinetica provocata dal moto del fluido.

La somma del primo e del secondo termine ($p + \rho g z$) è la **pressione idrostatica**, ovvero la pressione esercitata sulla base di una colonna di fluido incompressibile di altezza (h) e densità (ρ) sulla cui superficie agisce una pressione (p) (vedi equazione (14.11)).

La somma del primo e del terzo termine ($p + \frac{1}{2} \rho w^2$) è detta **pressione di ristagno**. La misura della differenza tra la pressione di ristagno e la pressione statica consente di determinare la velocità di un fluido. Su tale principio è basato il funzionamento del tubo di Pitot, uno strumento di misura della velocità di un fluido incompressibile largamente utilizzato in numerosi campi dell'ingegneria.

La costante che compare nell'equazione (14.25) non è altro che la pressione totale (p_{totale}) nel fluido, per cui l'equazione di Bernoulli mostra che in un condotto in cui si ha un flusso di fluido che soddisfa le ipotesi sopra descritte la pressione totale è la stessa in qualunque sezione del condotto.

Dividendo ciascun termine dell'equazione (14.25) per il peso specifico del fluido (ρg) si ottiene:

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{w^2}{2g} = \text{costante} \quad (14.26)$$

Ciascun termine nell'equazione (14.26) ha le dimensioni di una lunghezza:

- il primo termine ($\frac{p}{\rho g}$) è detto **altezza piezometrica** ed è l'altezza di una colonna di fluido che produce alla sua base la pressione (p);
- il secondo termine (z) è l'elevazione del fluido nella sezione considerata ed è detta **altezza geodetica**;
- il terzo termine ($\frac{w^2}{2g}$) è detto **altezza cinetica** e rappresenta l'altezza da cui un fluido scendendo in caduta libera raggiunge la velocità (w).

Tali grandezze vengono anche indicate in gergo tecnico sostituendo altezza con il termine di **prevalenza** o con quello di **carico**.

Anche se le ipotesi utilizzate per ricavare le equazioni (14.25) e (14.26) possono sembrare molto restrittive, l'equazione di Bernoulli viene applicata nella soluzione di molti problemi ingegneristici.

Spesso è necessario determinare a priori la velocità del fluido nel condotto, partendo dalle caratteristiche geometriche del condotto stesso.

Ciò può essere fatto utilizzando il **principio di conservazione della massa**, già introdotto e discusso al capitolo 2, che per un flusso stazionario e monodimensionale attraverso una qualunque sezione del condotto considerato è esprimibile mediante **l'equazione di continuità**:

$$\dot{m} = \rho A w = \text{costante}$$

dove \dot{m} è la portata massica di fluido in $[\text{kg s}^{-1}]$, (ρ) è la densità del fluido in $[\text{kg m}^{-3}]$, (A) è l'area della sezione del condotto in $[\text{m}^2]$ e (w) è la velocità del fluido in $[\text{m s}^{-1}]$.

Per un fluido incomprimibile per il quale la densità (ρ) può essere considerata costante, l'equazione di continuità può essere scritta in termini della portata volumetrica \dot{V} :

$$\dot{V} = A w = \text{costante}$$

Pertanto, con riferimento al caso illustrato in Figura 14.6 e per un fluido incomprimibile, il principio di conservazione della massa può essere scritto come:

$$A_1 w_1 = A_2 w_2 \quad (14.27)$$

ovvero, per un fluido incomprimibile la velocità di flusso e l'area della sezione attraverso la quale il fluido fluisce sono inversamente proporzionali.

Se sono note le caratteristiche dimensionali del condotto $(A_1 \text{ e } A_2)$ e la velocità (w_1) nella sezione di ingresso, la velocità (w_2) nella sezione di uscita è data da:

$$w_2 = \frac{A_1}{A_2} w_1 \quad (14.28)$$

Esempio 14.2

L'acqua contenuta in un grande serbatoio la cui superficie libera è esposta alla pressione atmosferica fluisce, con flusso che può essere considerato stazionario, monodimensionale e non-viscoso, attraverso un corto tubo avente sezione $A = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

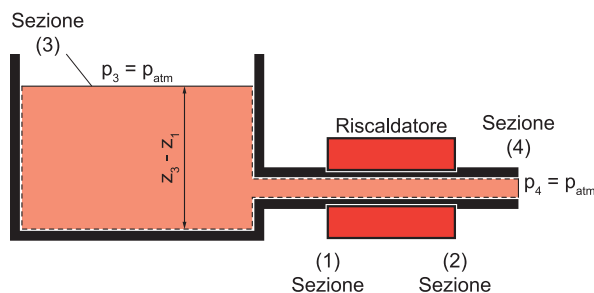


Figura 14.7
Schema del sistema per il riscaldamento di acqua proveniente da un serbatoio

La differenza di quota tra superficie libera dell'acqua nel serbatoio e ingresso nel tubo è $z_3 - z_1 = 3 \text{ m}$.

Il tubo passa all'interno di un riscaldatore, che fornisce all'acqua una potenza \dot{Q} dopo di che l'acqua fuoriesce dal tubo a pressione atmosferica.

Determinare la potenza termica che il riscaldatore deve fornire all'acqua per aumentarne la temperatura di 10°C .

Analisi

Si fanno le seguenti ipotesi:

- 1) flusso stazionario e monodimensionale
- 2) fluido incomprimibile e non-viscoso
- 3) assenza di organi meccanici in grado di scambiare lavoro utile
- 4) assenza di irreversibilità
- 5) assenza di dispersioni termiche dal riscaldatore all'ambiente esterno

Allora applicando il 1° principio della termodinamica al volume di controllo delimitato dalle sezioni (1) e (2) del tubo in corrispondenza del riscaldatore si ha:

$$\dot{Q} = \rho w_2 A_2 \left(u_2 + p_2 v + \frac{w_2^2}{2} + g z_2 \right) - \rho w_1 A_1 \left(u_1 + p_1 v + \frac{w_1^2}{2} + g z_1 \right)$$

dove u_1 e u_2 sono l'energia interna per unità di massa del fluido rispettivamente nella sezione (1) e nella (2) del tubo in corrispondenza del riscaldatore.

Applicando il principio di conservazione della massa si ha: $\rho w_2 A_2 = \rho w_1 A_1 = \dot{m}$ e quindi:

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m} \left[\left(p_2 v + \frac{w_2^2}{2} + g z_2 \right) - \left(p_1 v + \frac{w_1^2}{2} + g z_1 \right) \right] \quad (14.29)$$

Applicando l'equazione di Bernoulli al volume di controllo compreso tra le sezioni (1) e (2) si ha:

$$p_2 v + \frac{w_2^2}{2} + g z_2 = p_1 v + \frac{w_1^2}{2} + g z_1$$

Per cui l'equazione (14.29) diventa semplicemente: $\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1)$.

Poiché il fluido è incomprimibile la differenza di energia interna del liquido è esprimibile in termini della differenza di temperatura tra le sezioni (2) e (1) del volume di controllo.

$$\dot{Q} = \dot{m} c (T_2 - T_1) \quad (14.30)$$

dove c è il calore specifico dell'acqua.

Per calcolare la potenza da fornire al fluido è necessario quindi conoscere la portata massica \dot{m} che può essere espressa in termini della velocità w_4 con cui l'acqua esce dal tubo attraverso la sezione (4):

$$\dot{m} = \rho w_4 A_4 \quad (14.31)$$

Per determinare la velocità w_4 si può utilizzare l'equazione di Bernoulli applicata

fra la superficie (3) costituita dal pelo libero dell'acqua nel serbatoio e la superficie (4) da cui l'acqua esce dal tubo:

$$p_3 v + \frac{w_3^2}{2} + g z_3 = p_4 v + \frac{w_4^2}{2} + g z_4$$

Ricordando che $p_3 = p_4 = p_{\text{atmosferica}}$ e che $w_3 \approx 0$ si ottiene

$$w_4 = \sqrt{2g(z_3 - z_4)} = \sqrt{2g(z_3 - z_1)} \quad (14.32)$$

Soluzione

Utilizzando l'equazione (14.32) si può calcolare la velocità w_4 del fluido all'interno del tubo:

$$w_4 = \sqrt{2g(z_3 - z_1)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 3m} \approx 7,7 \frac{m}{s}$$

mediante la quale si può ricavare la portata massica di acqua che fluisce nel tubo:

$$\dot{m} = \rho w_4 A_4 = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 7,7 \frac{m}{s} \cdot 1,3 \cdot 10^{-4} m^2 = 1,0 \frac{kg}{s}$$

Nota la portata massica, si ricava, mediante la (14.30), la potenza termica che il riscaldatore deve fornire all'acqua per aumentarne la temperatura di 10 °C:

$$\dot{Q} = \dot{m} c (T_2 - T_1) = 1,0 \frac{kg}{s} \cdot 4,18 \frac{kJ}{kg^\circ C} 10^\circ C = 41,8 kW$$

Discussione

Il risultato ottenuto vale nei limiti di applicabilità delle ipotesi semplificative utilizzate per ottenere l'equazione di Bernoulli. In particolare, l'acqua può essere considerata senz'altro incompressibile e, considerando che la lunghezza del tubo è piccola, gli effetti dovuti alla viscosità dell'acqua possono essere ritenuti con buona approssimazione trascurabili.

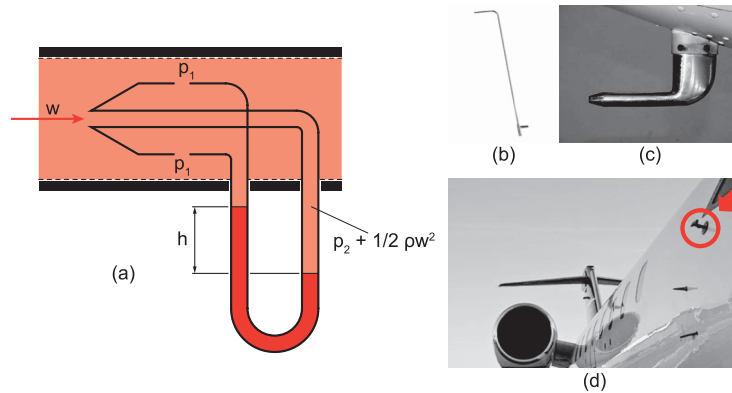
Va invece considerato che, nel caso reale non possono essere sicuramente trascurate le dispersioni termiche dal riscaldatore verso l'esterno, per cui l'ipotesi 5. può essere applicata solo se il riscaldatore viene ben coibentato mediante un sistema termoisolante.

Si noti, inoltre, che nel caso considerato il problema fluidodinamico, trattato mediante l'equazione di Bernoulli, e quello termico, trattato mediante il 1° principio della termodinamica sono stati risolti separatamente.

Esempio 14.3

La velocità di un fluido può essere misurata mediante il tubo di Pitot, uno strumento inventato da Henry Pitot (1695-1771), ingegnere e fisico francese, che oggi è di uso comune soprattutto in applicazioni aeronautiche, nell'automobilismo da competizione e in galleria del vento.

Figura 14.8
Il tubo di Pitot: (a) rappresentazione schematica; (b) e (c) tubi di Pitot reali; (d) esempio di applicazione in aeronautica



Determinare la velocità di flusso w di aria a temperatura ambiente ($\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$) se la differenza tra pressione dinamica e la pressione statica misurata mediante un manometro è $p_2 - p_1 = 463 \text{ Pa}$.

Analisi

Si fanno le seguenti ipotesi:

- 1) flusso stazionario e monodimensionale
- 2) fluido incomprimibile e non-viscoso
- 3) differenza di quota tra il punto in cui viene misurata la pressione statica e quello in cui viene misurata la pressione di ristagno trascurabile

Applicando l'equazione di Bernoulli al tubo di Pitot si ha:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho w^2 = \text{costante}$$

e considerando trascurabile la differenza di quota si ottiene:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho w^2$$

e quindi:

$$w = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \quad (14.33)$$

Soluzione

Utilizzando la relazione (14.32) si può calcolare la velocità w dell'aria all'interno del condotto:

$$w = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 463 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = \sqrt{\frac{772 \frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = 27,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Discussione

Utilizzando il risultato ottenuto si ricava che il numero di Mach per il flusso d'aria (vedi paragrafo 14.2.2.1) è:

$$Ma = \frac{w}{c} = \frac{27,7 \frac{m}{s}}{340 \frac{m}{s}} = 0,08$$

dove (c) è la velocità del suono in aria a temperatura ambiente.

Essendo $Ma \ll 0,32$ il flusso nel condotto, nonostante sia costituito da un aeriforme, può senz'altro essere considerato incomprimibile.

L'equazione di Bernoulli non tiene conto né della presenza, all'interno del volume di controllo, di macchine motrici o operatrici, che possono assorbire o fornire energia al sistema, né della dissipazione di energia dovuta alle irreversibilità. Per tenere conto di tali effetti occorre utilizzare l'equazione dell'energia meccanica (14.24):

$$\dot{L}' = \dot{m} \left[- \int_1^2 v dp - g \Delta z - \frac{\Delta w^2}{2} \right] - \dot{R}$$

che applicata al volume di controllo costituito dal fluido incomprimibile e viscoso che scorre tra le sezioni di ingresso e di uscita del condotto illustrato in Figura 14.6 e ricordando che $v = 1/\rho$ diventa:

$$\dot{L}' = \dot{m} \left[- \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) - g (z_2 - z_1) - \frac{1}{2} (w_2^2 - w_1^2) \right] - \dot{R} \quad (14.34)$$

che viene anche detta **equazione di Bernoulli generalizzata**.

Ciascun termine nella (14.34) ha le dimensioni di una potenza in [W]. In particolare:

- \dot{L}' è la potenza utile della macchina che scambia lavoro con il fluido all'interno del volume di controllo e che può essere scritta come $\dot{L}' = \dot{L}'_i > 0$, nel caso di una macchina motrice (ad esempio una turbina), e come $\dot{L}' = \dot{L}'_p < 0$, nel caso di una macchina operatrice come una pompa: in questo caso $\dot{L}'_p > 0$ è il modulo della potenza di pompaggio, che l'organo propulsore fornisce al fluido.
- \dot{R} è l'energia per unità di tempo dissipata all'interno del volume di controllo per effetto delle irreversibilità, costituite ad esempio dall'attrito fra il fluido viscoso e le pareti del condotto.

Dividendo ciascun termine per \dot{m} , e moltiplicando per ρ , si ottiene:

$$\frac{\dot{L}'}{\dot{m}} \rho = -(p_2 - p_1) - g \rho (z_2 - z_1) - \frac{1}{2} \rho (w_2^2 - w_1^2) - \frac{\dot{R}'}{\dot{m}} \rho \quad (14.35)$$

in cui ogni termine ha le dimensioni di una pressione in [N m⁻²].

In questo caso $\left(\frac{\dot{L}'}{\dot{V}}\right)$ è la variazione di pressione (positiva nel caso di una pompa, negativa nel caso di una turbina) tra uscita e ingresso del propulsore, mentre $\left(\frac{\dot{R}}{\dot{V}}\right)$ è la caduta di pressione tra uscita e ingresso del volume di controllo dovuta alle irreversibilità.

Dividendo ogni termine dell'equazione (14.35) per il **peso specifico** del fluido $\rho g = \gamma$, si ottiene:

$$\frac{\dot{L}'}{\dot{m}g} = -\frac{1}{\gamma}(p_2 - p_1) - (z_2 - z_1) - \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2) - \frac{\dot{R}}{\dot{m}g} \quad (14.36)$$

In questo caso ogni termine dell'equazione ha le dimensioni di una lunghezza in [m] e rappresentano una prevalenza o un carico, in particolare:

- $\frac{\dot{L}'}{\dot{m}g} = h_{prop}$ è la **prevalenza del propulsore** che è positiva nel caso di una macchina motrice $h_{prop} = h_t$ e negativa nel caso di una macchina operatrice ($h_{prop} = -h_p$), dove $h_p > 0$ è il modulo della prevalenza della macchina ad esempio una pompa.
- $\frac{\dot{R}}{\dot{m}g} = h_{irr}$ rappresenta la **perdita di carico** dovuta alle irreversibilità.

Nel caso di un condotto in cui il fluido è movimentato mediante una pompa si ha:

$$-h_p = -\frac{1}{\gamma}(p_2 - p_1) - (z_2 - z_1) - \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2) - h_{irr}$$

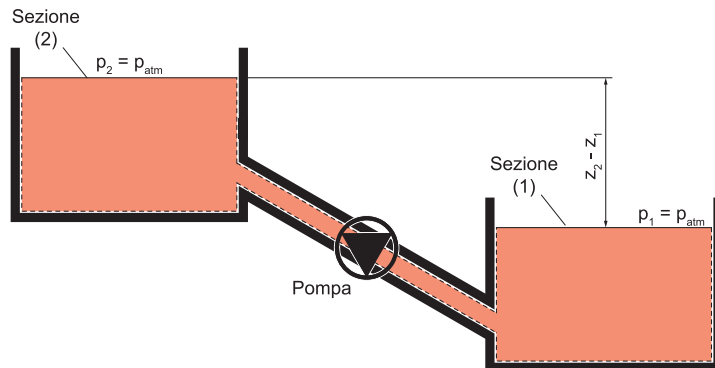
ovvero

$$h_p = \frac{1}{\gamma}(p_2 - p_1) + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2) + h_{irr} \quad (14.37)$$

Esempio 14.4

Una pompa solleva acqua con una portata volumetrica $\dot{V} = 10$ litri/s da un serbatoio a un altro con una differenza di quota $(z_2 - z_1) = 6$ m (vedi Figura 14.9).

Figura 14.9
Schema del sistema di pompaggio di acqua fra due serbatoi posti a quote differenti



Supponendo che:

- il flusso sia stazionario e incompressibile;
- la pressione sulla superficie dell'acqua contenuta in ciascun serbatoio sia uguale alla pressione atmosferica;
- la velocità dell'acqua sulla superficie di ciascun serbatoio sia praticamente nulla;
- le perdite di carico siano trascurabili.

Determinare la potenza della pompa necessaria per sollevare l'acqua dal serbatoio inferiore a quello superiore con una portata volumetrica $\dot{V} = 6 \text{ litri/s}$.

Analisi

Si utilizza l'equazione (14.35) per determinare la prevalenza della pompa

$$h_p = \frac{1}{\gamma}(p_2 - p_1) + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2) + h_{irr}$$

Essendo:

$$p_2 = p_{atm} = p_1 \rightarrow p_2 - p_1 = 0$$

$$w_2 = w_1 \approx 0 \rightarrow \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0$$

$$h_{irr} \approx 0$$

la prevalenza della pompa è calcolabile, semplicemente, come:

$$h_p = (z_2 - z_1)$$

Ricordando che la potenza della pompa è legata alla prevalenza dalla relazione

$$h_p = \frac{1}{\rho g} \dot{L}' \text{ e che } \dot{m} = \rho \dot{V} \text{ si ottiene } \dot{L}' = \rho \dot{V} g h_p.$$

Soluzione

$$\text{La portata volumetrica di acqua è: } \dot{V} = 5 \frac{\text{litri}}{\text{s}} = 5 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}},$$

$$\dot{L}' = \rho \dot{V} g h_p = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 6 \text{ m} = 294 \frac{\text{N m}}{\text{s}} = 294 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 294 \text{ W}$$

Discussione

La potenza meccanica fornita dalla pompa al fluido, nelle ipotesi date, serve essenzialmente per aumentarne l'energia potenziale. L'esempio mostra che la prevalenza di una pompa può essere interpretata come l'altezza a cui essa può sollevare l'acqua rispetto alla sua quota.

Nel caso reale in cui siano non trascurabili le perdite di carico la prevalenza della pompa sarà minore rispetto a quella del caso di fluido non viscoso per cui se

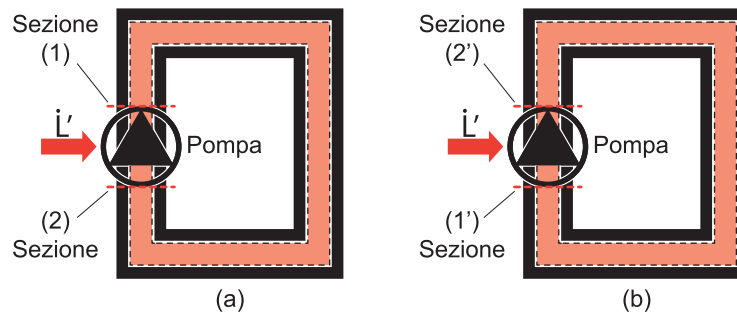
dimensionata con la potenza calcolata sopra, la pompa non sarà in grado di sollevare l'acqua dal serbatoio inferiore a quello superiore con la portata volumetrica di 5 litri al secondo.

Pertanto, la potenza della pompa deve essere sicuramente maggiore di quella ottenuta nel caso ideale, ma per determinarla occorre essere in grado di calcolare le perdite di carico h_c .

In molte applicazioni ingegneristiche quanto visto nell'esempio precedente deve essere applicato a un circuito idraulico chiuso, che per semplicità di trattazione può essere schematizzato come in Figura 14.10.

Figura 14.10

Schema di un circuito idraulico in cui scorre un fluido reale incompressibile mosso da una pompa alimentata con una potenza \dot{L}' : (a) il volume di controllo è costituito dal circuito compreso tra le sezioni 1 e 2, che non comprende il propulsore; (b) il volume di controllo è costituito dal circuito compreso tra le sezioni 1' e 2', che comprende il propulsore.



L'analisi del sistema può essere effettuata utilizzando l'equazione (14.37):

$$h_p = \frac{1}{\gamma}(p_2 - p_1) + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2) + h_{irr}$$

dove h_p è la prevalenza della pompa, legata alla potenza di alimentazione della pompa dalla relazione $|\dot{L}'| = \dot{m}gh_p$ e h_{irr} è la perdita di carico nel circuito idraulico dovuto alle irreversibilità.

Applicando tale equazione al volume di controllo costituito dal circuito idraulico delimitato dalla sezione di ingresso (1) e dalla sezione di uscita (2), all'interno del quale, quindi, non è presente la pompa (vedi Figura 14.10a) si ottiene:

$$0 = \frac{1}{\gamma}(p_2 - p_1) + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2) + h_{irr}$$

Considerando che:

- il flusso è incompressibile ed essendo le sezioni di ingresso e di uscita del circuito (corrispondenti, rispettivamente, alle sezioni di uscita e di ingresso della pompa) praticamente uguali si ha $w_1 \approx w_2$ per cui: $(w_2^2 - w_1^2) \approx 0$;
- la differenza di quota fra le due sezioni di ingresso e di uscita sia trascurabile $(z_2 - z_1) \approx 0$.

si ha

$$h_{irr} = \frac{1}{\gamma}(p_1 - p_2) \quad (14.38)$$

Ovvero, le perdite di carico lungo il circuito, dovute alla dissipazione di energia per le irreversibilità nel processo, provocano una caduta di pressione dal valore p_1 all'ingresso del circuito al valore p_2 all'uscita.

È evidente che perché il fluido continui a scorrere all'interno del circuito la diminuzione di pressione deve essere compensata dalla pompa, in modo tale che allo stato stazionario l'energia per unità di tempo dissipata per irreversibilità sia compensata dalla potenza utile fornita dalla pompa al fluido.

Infatti, applicando l'equazione (14.37) al volume di controllo delimitato dalla sezione di ingresso 1' e dalla sezione di uscita 2', costituito quindi essenzialmente dalla pompa (vedi Figura 14.10b) e utilizzando le stesse approssimazioni viste sopra si ottiene:

$$h_p = \frac{1}{\gamma}(p_{2'} - p_{1'}) + h_{irr,prop}$$

Possiamo considerare la pompa come una macchina ideale ponendo $h_{irr,prop} = 0$, dopo di che terremo conto degli effetti delle irreversibilità utilizzando il rendimento isoentropico η_{iso} della pompa.

Allora, indicando con $h_{p,id}$ la prevalenza della pompa ideale, si ha:

$$h_{p,id} = \frac{1}{\gamma}(p_{2'} - p_{1'})$$

Ma essendo $p_{2'} = p_1$ e $p_{1'} = p_2$, e utilizzando la relazione (14.37), si ottiene:

$$h_{p,id} = \frac{1}{\gamma}(p_{2'} - p_{1'}) = \frac{1}{\gamma}(p_1 - p_2) = h_{irr} \quad (14.39)$$

Ovvero, la prevalenza della pompa è uguale alla perdita di carico nel circuito idraulico: in altri termini, come già evidenziato in precedenza, la potenza meccanica fornita dalla pompa al fluido serve per vincere la caduta di pressione lungo il circuito dovuto alle irreversibilità.

La potenza della pompa ideale è calcolabile come:

$$\dot{L}'_{id} = \rho \dot{V} g h_{p,id} = \rho \dot{V} g h_{irr} \quad (14.40)$$

da cui utilizzando il rendimento isoentropico della pompa η_{is} , si ricava la potenza della pompa reale:

$$L' = \frac{\dot{L}'_{id}}{\eta_{is}} = \frac{\rho \dot{V} g}{\eta_{is}} h_{irr} \quad (14.41)$$

Questo risultato mostra chiaramente che per dimensionare la pompa da inserire nel circuito idraulico è necessario determinare le perdite di carico.

Un circuito idraulico, ad esempio, di un impianto di riscaldamento ad acqua è generalmente costituito, oltre che dal propulsore, da un insieme di organi quali,

generatori di calore, corpi scaldanti, valvole, rubinetti eccetera, collegati fra di loro mediante tubazioni.

Il passaggio del fluido sia lungo le tubazioni sia attraverso i diversi organi dà luogo a perdite di carico, che, per il loro calcolo, vengono generalmente divise in perdite di carico distribuite (o continue) e perdite di carico concentrate (o localizzate).

Le **perdite di carico distribuite** h'_{irr} sono quelle dovute alla viscosità del fluido e quindi all'attrito tra fluido e superfici solide interne delle tubazioni rettilinee.

Le **perdite di carico concentrate** h''_{irr} sono quelle dovute a effetti fluidodinamici, quali la turbolenza, che si verificano in corrispondenza di curve, restrizioni eccetera.

Le perdite di calcolo totali sono date dalla loro somma:

$$h_{irr} = h'_{irr} + h''_{irr}$$

Le **perdite di calcolo distribuite** sono generalmente calcolate con l'**equazione di Darcy-Weisbach**:

$$h'_{irr} = f \frac{L}{D} \frac{w^2}{2g} \quad (14.42)$$

da cui si ricava che le perdite di carico distribuite:

- sono direttamente proporzionali a f = **fattore di attrito**;
- sono direttamente proporzionali alla lunghezza della tubazione;
- sono inversamente proporzionali al diametro della tubazione;
- dipendono fortemente dalla velocità del fluido, essendo proporzionali al quadrato della velocità.




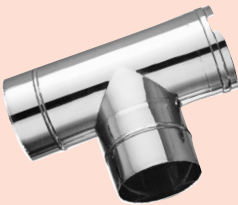
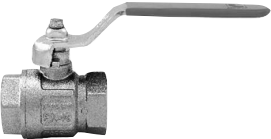
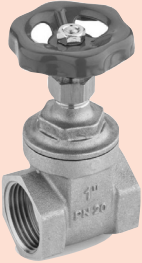
Le condizioni di validità della (14.42) e le modalità per la determinazione del fattore di attrito verranno trattate in dettaglio successivamente.

Le **perdite di carico concentrate** dovute ai componenti del circuito diversi dai tubi rettilinei di possono essere calcolate mediante la formula empirica:

$$h''_{irr} = \zeta \frac{w^2}{2g} \quad (14.43)$$

che mostra che anche le perdite di carico concentrate dipendono fortemente dalla velocità di flusso. Il fattore ζ è adimensionale ed è detto coefficiente di perdita. Esso dipende dal particolare tipo di componente che determina la perdita di carico (curva, gomito, restrizione, valvola ecc.).

A titolo di esempio vengono riportati nella Tabella seguente alcuni valori del coefficiente di perdita per alcuni tipici componenti di un circuito idraulico.

Componente		Coefficiente di perdita ζ
Curva a gomito (90°)		1,5
Curva a 45°		0,2
Curva a 180°		1,5
Raccordo a T		0,9
Valvola a sfera, aperta		10
Valvola a serranda, aperta		0,15

14.2.4.2 APPROFONDIMENTO SUL SIGNIFICATO FISICO DEL NUMERO DI REYNOLDS E DEL NUMERO DI GRASHOF

Nella trattazione precedente sono stati utilizzati i gruppi adimensionali $Re = \rho w_{\infty} L / \mu$ (numero di Reynolds) e $Gr = g\beta |T_s - T_{\infty}| L^3 / \nu^2$ (numero di Grashof) per valutare a priori l'andamento dei regimi di flusso nel caso, rispettivamente, di flusso forzato e di flusso naturale.

Si è anche assunto che il numero di Reynolds esprima, nel caso di flusso forzato, il rapporto tra la forza di inerzia e la forza di attrito viscoso che agiscono su un fluido in moto:

$$Re \propto \frac{F_{inerzia}}{F_{attrito}}$$

e che il numero di Grashof esprima, nel caso di flusso naturale, il rapporto tra la forza di galleggiamento e la forza di attrito viscoso, che agiscono su un fluido in presenza di un gradiente di densità:

$$Gr \propto \frac{F_{galleggiamento}}{F_{attrito}}$$

Di seguito viene mostrata la validità di queste interpretazioni del significato fisico di Re e Gr , mediante valutazioni di tipo qualitativo basate sull'analisi dimensionale delle forze che agiscono sul fluido.

Consideriamo un elemento di fluido avente volume V . Utilizzando la seconda legge di Newton della dinamica, **la forza di inerzia** che agisce su tale volume può essere espressa come $F_{inerzia} = ma$. La massa è data da $m = \rho V$, ovvero ha dimensioni $[m] = [\rho][L^3]$, quindi, qualitativamente, si può ritenere che la massa contenuta nel volume V sia proporzionale alla densità moltiplicata per una lunghezza caratteristica L al cubo: $m \propto \rho L^3$.

Per l'accelerazione si ha: $a = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t}$ dove l è una variabile spaziale e ∂l rappresenta lo spazio percorso dal fluido nella direzione della velocità w nell'intervallo di tempo ∂t . Allora $\frac{\partial l}{\partial t} = w$ e l'accelerazione può essere scritta come $a = \frac{\partial w}{\partial l} w$ ovvero, dimensionalmente si ha $[a] = [w^2]/[L]$.

L'espressione precedente mostra che l'accelerazione è dello stesso ordine di grandezza del quadrato di una velocità caratteristica del problema (la velocità di fluido indisturbato w_{∞}) divisa per la lunghezza caratteristica del problema, per cui, qualitativamente, si può ritenere che l'accelerazione sia proporzionale a:

$$a \propto \frac{w_{\infty}^2}{L}$$

Pertanto si può porre,

$$F_{inerzia} = ma \propto \rho L^3 \frac{w_{\infty}^2}{L} = \rho L^2 w_{\infty}^2 \quad (14.43)$$

ovvero, che la forza di inerzia che agisce sul fluido sia proporzionale alla densità ρ del fluido, alla velocità di flusso indisturbato al quadrato e alla lunghezza caratteristica al quadrato.

La forza di attrito è uguale allo sforzo tangenziale viscoso per l'area della superficie su cui agisce:

$$F_{\text{attrito}} = \tau A$$

Lo sforzo tangenziale viscoso è $\tau = \mu \partial w / \partial y$ ovvero dimensionalmente è dato da $[\tau] = [\mu][w] / [L]$, per cui, qualitativamente, è dello stesso ordine di grandezza della quantità $\mu w_{\infty} / L$, per cui si può ritenere che sia $\tau \propto \frac{\mu w_{\infty}}{L}$.

L'area A ha dimensioni $[A] = [L^2]$ e quindi possiamo ritenere che sia proporzionale alla lunghezza caratteristica al quadrato: $A \propto L^2$.

Pertanto possiamo porre

$$F_{\text{attrito}} = \tau A \propto \frac{\mu w_{\infty}}{L} L^2 = \mu w_{\infty} L \quad (14.44)$$

Finalmente, utilizzando le relazioni di proporzionalità (14.43) e (14.44) otteniamo che il rapporto tra forza di inerzia e forza di attrito è proporzionale a:

$$\frac{F_{\text{inerzia}}}{F_{\text{attrito}}} \propto \frac{\rho L^2 w_{\infty}^2}{\mu w_{\infty} L} = \frac{\rho L w_{\infty}}{\mu} = Re \quad (14.45)$$

che mostra che il numero di Reynolds effettivamente è strettamente connesso con il rapporto tra la forza di inerzia e la forza di attrito che agiscono sul fluido. Per quanto riguarda il significato fisico del numero di Grashof possiamo ricavarlo ponendo:

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2} = (g \beta \Delta T L) \frac{L^2}{\nu^2} \quad (14.46)$$

Il termine entro parentesi ha le dimensioni di una velocità al quadrato, per cui possiamo porre:

$$w_{eq} = \sqrt{g \beta \Delta T L} \quad (14.47)$$

dove w_{eq} è una velocità equivalente del fluido dovuto alla spinta della forza di galleggiamento, a cui possiamo far giocare per la convezione naturale lo stesso ruolo che la velocità di fluido indisturbato gioca nel caso di convezione forzata. Allora, utilizzando la (14.47) nella (14.46), si ha

$$Gr = \left(\frac{w_{eq} L}{\nu} \right)^2 = Re_{eq}^2 \quad (14.48)$$

dove Re_{eq} è il numero di Reynolds basato, anziché sulla velocità di fluido indisturbato w_{∞} , che nel caso di convezione naturale è nulla, sulla velocità equivalente w_{eq} .

Allora

$$Re_{eq}^2 \propto \left(\frac{\text{Forza di inerzia equivalente}}{\text{Forza di attrito}} \right)^2 \propto \left(\frac{\text{Forza di galleggiamento}}{\text{Forza di attrito}} \right) \quad (14.49)$$

Nell'ultimo passaggio dell'equazione precedente si è tenuto conto del fatto che la forza di inerzia equivalente non è altro che la forza responsabile del moto del fluido in convezione naturale, che quindi è direttamente legata alla forza di galleggiamento.

Utilizzando la relazione (14.43) per esprimere la forza di inerzia equivalente e la (14.44) per la forza di attrito, con w_{eq} al posto di w_∞ , si ottiene:

$$Re_{eq}^2 \propto \left(\frac{\rho L^2 w_{eq}^2}{\mu L w_{eq}} \right)^2 = \left(\frac{L w_{eq}}{\frac{\mu}{\rho}} \right)^2 = \frac{L^2 w_{eq}^2}{\nu^2} \quad (14.50)$$

e, utilizzando la relazione (14.47) per la velocità equivalente w_{eq} :

$$Re_{eq}^2 \propto \frac{L^2 (\sqrt{g\beta\Delta T L})^2}{\nu^2} = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2} = Gr \quad (14.51)$$

Uguagliando la (14.49) alla (14.51) si ricava immediatamente che il numero di Grashof è legato al rapporto tra la forza di galleggiamento che muove il fluido e la forza di attrito che si oppone a tale moto.

14.3.3 APPROFONDIMENTO SUL SIGNIFICATO FISICO DEL NUMERO DI PRANDTL E DEL NUMERO DI NUSSELT

Nella trattazione precedente sono stati utilizzati i gruppi adimensionali $Pr = \mu c_p / \lambda$ (numero di Prandtl) e $Nu = h_c L / \lambda$ (numero di Nusselt). Data la loro importanza nella soluzione di problemi di scambio termico convettivo è utile analizzare più accuratamente il loro significato fisico, così come si è fatto per il numero di Reynolds e il numero di Grashof (vedi Approfondimento 14.2.4.2).

Per quanto riguarda il **numero di Prandtl** si è già detto che, come si evince in modo ovvio dalla sua definizione, dipendendo esclusivamente da proprietà fisiche del mezzo, è caratteristico del particolare tipo di fluido.

Per meglio comprenderne il significato fisico possiamo manipolare la formula che definisce il numero di Prandtl, moltiplicando e dividendo per la densità ρ del fluido:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \frac{\rho}{\rho} = \frac{\mu/\rho}{\lambda/(\rho c_p)} = \frac{\nu}{\alpha}$$

dove

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ è la viscosità cinematica del fluido, in $[m^2/s]$;

$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ è la diffusività termica del fluido, in $[m^2/s]$.

La diffusività termica α è di grande importanza nello scambio termico per conduzione in regime variabile nel tempo ed è legata alla rapidità con cui un mezzo

materiale (nel nostro caso un fluido) risente al proprio interno delle variazioni di temperatura che avvengono in superficie. In altri termini, esprime la capacità di un mezzo di propagare al suo interno variazioni di temperatura.

Per quanto riguarda il numeratore della relazione (14.74), si è visto in precedenza che dalla viscosità di un fluido dipendono gli sforzi viscosi che danno luogo al suo interno a effetti di trascinamento da parte degli strati più veloci su quelli più lenti con conseguente trasferimento di quantità di moto.

Pertanto il numero di Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$, **può essere interpretato in termini di rapporto fra la capacità del fluido di trasmettere al proprio interno quantità di moto e la capacità di trasmettere energia per conduzione termica:**

$$Pr \propto \frac{\text{diffusione di quantità di moto}}{\text{diffusione di calore}}$$

Il numero di Prandtl influenza anche lo sviluppo degli strati limite dinamico e termico. Infatti più è grande la capacità di trasmettere quantità di moto dalla superficie all'interno del fluido, più gli sforzi viscosi saranno non trascurabili a una distanza più grande dalla superficie stessa e, quindi, sarà più grande lo spessore $\delta_{w,x}$ dello strato limite dinamico. Analogamente più è grande la capacità del fluido di diffondere calore, più le variazioni di temperatura sulla superficie si propagheranno a distanza all'interno del fluido e, quindi, sarà grande lo spessore $\delta_{t,x}$ dello strato limite termico.

Quindi in diverse applicazioni, come ad esempio per il flusso forzato laminare su lastra piana, il numero di Prandtl può essere legato al rapporto tra gli spessori dello strato limite dinamico e termico:

$$Pr \propto \frac{\delta_{w,x}}{\delta_{t,x}}$$

Per quanto riguarda il **numero di Nusselt** si è già visto che rappresenta il coefficiente di scambio termico convettivo adimensionale, per cui il suo uso principale è legato alla possibilità di metterlo in relazione funzionale con i gruppi adimensionali che descrivono i rapporti tra forze che agiscono sul fluido (Re per la convezione forzata, Gr per la convezione naturale) e con il numero di Prandtl. Per meglio chiarire, però, il significato fisico del numero di Nusselt possiamo riferirci alla situazione illustrata in Figura 14.16.

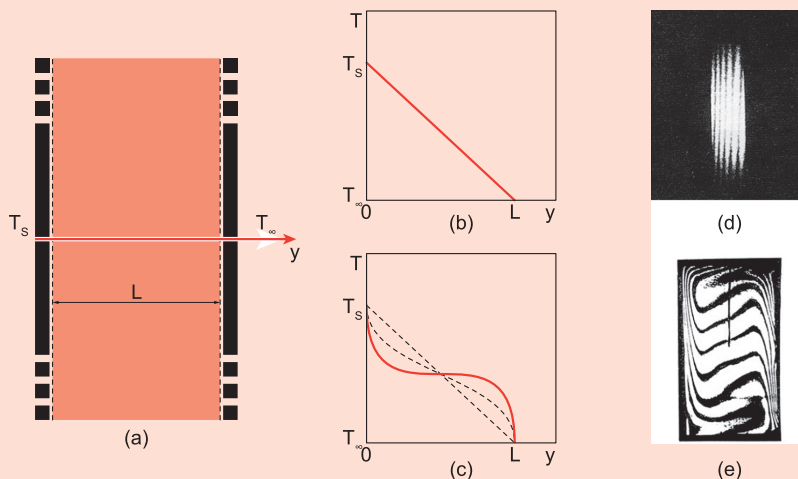


Figura 14.16

Strato di fluido tra due superfici solide a temperature diverse:

- profilo di temperatura (b) e interferogramma (d) nel caso in cui il fluido sia in quiete;
- profilo di temperatura (c) e interferogramma (e) nel caso in cui il fluido sia in convezione termica naturale con elevato numero di Nusselt.

Si ha uno strato di fluido, di spessore L , posto tra due lastre piane solide mantenute a temperature costanti e uniformi, rispettivamente, T_s e T_∞ , con $T_s > T_\infty$. Lo spessore dello strato di fluido che, ovviamente coincide con la distanza tra le lastre, è L (Figura 14.16a).

Se il fluido è in quiete lo scambio di calore avviene unicamente per conduzione termica.

Pertanto, allo stato stazionario, la potenza termica conduttiva \dot{Q}_k'' scambiata per unità di superficie attraverso lo strato piano di fluido è data da:

$$\dot{Q}_k'' = \frac{\lambda}{L}(T_s - T_\infty)$$

Se invece il fluido è in moto si avrà scambio termico per convezione e la potenza termica convettiva \dot{Q}_k'' scambiata per unità di superficie si può calcolare con la legge di Newton della convezione:

$$\dot{Q}_k'' = h_{c,L}(T_s - T_\infty)$$

Allora il rapporto tra le potenze termiche unitarie scambiate nei due casi sarà:

$$\frac{\dot{Q}_c''}{\dot{Q}_k''} = \frac{h_{c,L}(T_s - T_\infty)}{\frac{\lambda}{L}(T_s - T_\infty)} = \frac{h_{c,L}L}{\lambda} = Nu_L$$

Ovvero, il numero di Nusselt fornisce un'indicazione di quanto lo scambio termico convettivo sia più efficiente dello scambio termico conduttivo in un fluido a parità di configurazione geometrica e di differenza di temperatura che determina il flusso di calore.

Possiamo ulteriormente chiarire il significato fisico del numero di Nusselt facendo riferimento al gradiente di temperatura all'interfaccia solido-fluido, che come si è visto in precedenza ha un'importanza fondamentale sia nello scambio termico conduttivo che nello scambio termico convettivo. Facciamo riferimento all'interfaccia tra fluido e superficie a temperatura maggiore T_s , posta in Figura 14.16a in $y=0$, ma considerazioni del tutto analoghe possono essere ripetute se considerassimo l'interfaccia tra fluido e superficie più fredda a temperatura T_∞ , posta in $y=L$.

Nel caso conduttivo il profilo di temperatura è lineare (Figura 14.16b) e la potenza termica unitaria scambiata per conduzione può essere calcolata utilizzando il postulato di Fourier:

$$\dot{Q}_k'' = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Si è utilizzato il gradiente di temperatura in $y=0$, ma ovviamente, essendo la distribuzione di temperatura lineare il gradiente di temperatura è lo stesso in ogni posizione all'interno del fluido.

La potenza termica unitaria conduttiva può essere anche calcolata come

$$\dot{Q}_k'' = \frac{\lambda}{L}(T_s - T_\infty)$$

per cui uguagliando le due equazioni si ottiene:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\lambda}{L}(T_s - T_\infty)$$

da cui, con semplici passaggi e utilizzando le proprietà della derivata si ricava:

$$\frac{-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{\frac{\lambda}{L}(T_s - T_\infty)} = 1 = \frac{\partial \left(\frac{T_s - T}{T_s - T_\infty}\right)}{\partial \left(\frac{y}{L}\right)} \bigg|_{y=0} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \bigg|_{y^*=0}$$

avendo definito la temperatura adimensionale T^* come $T^* = \frac{T_s - T}{T_s - T_\infty}$ e la coordinata y adimensionale come $y^* = \frac{y}{L}$.

Pertanto, si ha che il gradiente di temperatura adimensionale nel caso conduttivo è

$$\left\{ \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right\}_{y^*=0} \bigg|_{\text{conduttivo}} = 1$$

Se invece il fluido è in moto possiamo mettere in relazione il coefficiente di scambio termico convettivo $h_{c,L}$ con il gradiente di temperatura in $y=0$ mediante la relazione:

$$h_{c,L}(T_s - T_\infty) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

da cui

$$h_{c,L} = -\frac{\lambda}{(T_s - T_\infty)} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Ricordando la definizione di numero di Nusselt, con semplici passaggi matematici, utilizzando le proprietà della derivata e ricordando la definizione della temperatura adimensionale T^* e della coordinata adimensionale y^* , si ottiene:

$$Nu_L = \frac{h_{c,L} L}{\lambda} = -\frac{L}{(T_s - T_\infty)} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\partial \left(\frac{T_s - T}{T_s - T_\infty}\right)}{\partial \left(\frac{y}{L}\right)} \bigg|_{y=0} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \bigg|_{y^*=0}$$

Pertanto, si ha che il gradiente di temperatura adimensionale nel caso convettivo è

$$\left\{ \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right\}_{y^*=0} \bigg|_{\text{convettivo}} = Nu_L$$

Quindi il numero di Nusselt dà un'indicazione su quanto il gradiente di temperatura adimensionale all'interfaccia solido-fluido è maggiore di quello unitario che si ha nel caso conduttivo.

Se il numero di Nusselt è dell'ordine di qualche unità ciò significa che lo scambio termico convettivo è poco efficiente come può avvenire ad esempio in convezione naturale o in convezione forzata a bassa velocità.

Se invece si ha $Nu \gg 1$ ciò significa che lo scambio termico è molto innalzato dal moto del fluido rispetto al caso di fluido stagnante (Figura 14.16c).

In Figura 14.16 sono anche riportate le immagini delle frange di interferenza ottenute con la tecnica dell'interferometria olografica presso il laboratorio di "Tecniche ottiche applicate alla termofluidodinamica" dell'allora Dipartimento di Energetica (oggi DIISM) dell'Università Politecnica delle Marche. Per interpretare tali immagini si può ritenere che ogni frangia, alternativamente chiara e scura, può essere qualitativamente assimilata a un'isoterma nel fluido. Nell'immagine di Figura 14.16d si vede che le frange e quindi le isoterme sono equispaziate sull'intero spessore del fluido, ovvero il profilo di temperatura è lineare (Figura 14.16b) e il gradiente di temperatura ha un andamento uniforme: è la situazione tipica di fluido stagnante che scambia calore per conduzione termica. Nell'immagine in Figura 14.16e le frange e quindi le isoterme sono più ravvicinate in prossimità delle pareti solide rispetto alla parte centrale dello strato di fluido, che è praticamente isoterma. Quindi il profilo di temperatura non è più lineare (Figura 14.16c) e il gradiente di temperatura alle interfacce solido-fluido è maggiore rispetto al caso conduttivo. Ovvero, la variazione di temperatura nel fluido è **concentrata in prossimità delle pareti con gradienti di temperatura molto elevati e quindi con un numero di Nusselt molto maggiore** rispetto al caso conduttivo. Ciò è ovviamente dovuto a un drastico aumento della velocità del fluido.

I risultati e l'interpretazione del significato fisico del numero di Nusselt ricavati nel caso illustrato in Figura 14.16 possono essere facilmente generalizzati anche agli altri casi di scambio termico convettivo.

14.4.1

CONVEZIONE FORZATA ESTERNA SU LASTRA PIANA

L'importante caso di un flusso forzato esterno è stato trattato in più riprese nei paragrafi precedenti come esempio applicativo per discutere aspetti termici e fluidodinamici di carattere generale nella trattazione di problemi di convezione termica, come l'uso dei gruppi adimensionali, delle correlazioni empiriche di uso pratico e così via.

Qui si approfondisce lo studio di questo caso richiamando sinteticamente alcuni concetti teorici e riportando in dettaglio le correlazioni ormai di uso generale per la progettazione di sistemi di scambio termico che possono essere modellizzati con buona approssimazione mediante questa configurazione geometrica e termofluidodinamica.

Si ha, quindi, una lastra piana di area (A) su cui scorre, con velocità di fluido indisturbato (w_∞), un fluido newtoniano avente densità (ρ), viscosità dinamica (μ) e calore specifico (c_p). La lastra è ferma e viene mantenuta a temperatura costante

e uniforme (T_s) mentre la temperatura del fluido indisturbato è (T_∞). Ancora una volta, si può assumere ($T_s > T_\infty$) senza perdita di generalità nella trattazione, che può essere facilmente adattata al caso opposto in cui il fluido sia a temperatura maggiore di quella della lastra.

Si sa già, perché il problema è già stato trattato nei Paragrafi 14.2 e 14.3, cosa accade a seguito dell'interazione fra fluido e lastra solida. Come descritto in Figura 14.10, a partire dal bordo di attacco, per effetto degli sforzi tangenziali viscosi, si ha la formazione di uno strato limite dinamico in cui la velocità del fluido varia da ($w = 0$) all'interfaccia solido-fluido (condizione di non-scorrimento) alla velocità del fluido indisturbato. Lo spessore ($\delta_{w,x}$) dello strato limite è definito come la distanza dalla lastra in cui la velocità del fluido raggiunge un valore pari al 99% della velocità di fluido indisturbato (w_∞). Ovvero, introducendo la velocità adimensionale del fluido ($w^* = w/w_\infty$) si ha che lo spessore ($\delta_{w,x}$) dello strato limite è uguale alla distanza dalla lastra in cui si ha ($w^* = 0,99$).

Contemporaneamente alla formazione dello strato limite dinamico, si ha, per effetto dello scambio termico tra lastra e fluido, lo sviluppo di uno strato limite termico, all'interno del quale la temperatura varia da (T_s) a contatto con la parete solida (ovvero in ($y = 0$)) fino a una temperatura molto prossima a quella di fluido indisturbato. Per la precisione, definendo la temperatura adimensionale del fluido come ($T^* = (T_s - T) / (T_s - T_\infty)$), lo spessore ($\delta_{T,x}$) dello strato limite termico è la distanza dalla lastra in cui si ha ($T^* = 0,99$).

All'interno dello strato limite laminare la componente della velocità del fluido perpendicolare alla lastra (w_y), ovvero perpendicolare alla direzione prevalente del flusso, è trascurabile rispetto alla componente (w_x), ovvero alla componente della velocità perpendicolare alla direzione prevalente del flusso:

$$w_x \gg w_y$$

Al contrario, il gradiente di velocità nella direzione prevalente del flusso ($\partial w / \partial x$) è sempre molto minore di quello in direzione perpendicolare alla lastra ($\partial w / \partial y$):

$$\frac{\partial w}{\partial y} \gg \frac{\partial w}{\partial x}$$

Anche il gradiente di temperatura nella direzione prevalente del flusso ($\partial T / \partial x$) è sempre molto minore di quello in direzione perpendicolare alla lastra ($\partial T / \partial y$):

$$\frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x}$$

Man mano che il fluido scorre lungo la lastra lo spessore dello strato limite dinamico aumenta, con conseguente diminuzione degli sforzi viscosi all'interno del fluido, per cui a un certo punto le forze viscosi non sono più in grado di mantenere il flusso ordinato strato su strato tipico del regime laminare e si ha la transizione al regime turbolento. In realtà la transizione è graduale ma, come già discusso nel paragrafo 14.2.4 e come illustrato in Figura 14.12, si utilizza un modello semplificato che prevede che la transizione avvenga in una ben definita

posizione (x_{crit}) che può essere determinata conoscendo il valore critico del numero di Reynolds (Re_{crit}).

Per il flusso forzato su lastra piana si può assumere ($Re_{crit} = 5 \cdot 10^5$).

Essendo

$$Re_{crit} = \frac{\rho w_{\infty} x_{crit}}{\mu} = \frac{w_{\infty} x_{crit}}{\nu} = 5 \cdot 10^5$$

si ha

$$x_{crit} = \frac{\mu}{\rho u_{\infty}} Re_{crit} = \frac{\nu}{u_{\infty}} Re_{crit} = \frac{\nu}{u_{\infty}} 5 \cdot 10^5$$

Essendo ($Re_x = (\rho w_{\infty} x)/\mu = (w_{\infty} x)/\nu$), si ha che:

- se ($Re_x < Re_{crit}$) ovvero se ($x < x_{crit}$) il flusso è laminare;
- se ($Re_x > Re_{crit}$) ovvero se ($x > x_{crit}$) il flusso è turbolento.

Lo spessore dello strato limite dinamico nel **regime di flusso laminare** può essere calcolato con la relazione:

$$\delta_{w,x} = \frac{5}{Re_x^{1/2}} x \quad (14.77)$$

Ricordando la definizione di (Re_x) si ha che:

- **lo spessore ($\delta_{w,x}$), in regime laminare, cresce, man mano che il fluido scorre lungo la lastra, con legge proporzionale a ($x^{1/2}$).**

Lo spessore dello strato limite termico può essere calcolato con la relazione:

$$\delta_{T,x} = \frac{5}{Re_x^{1/2} Pr^{1/3}} x \quad (14.78)$$

per cui:

- **in regime laminare, anche lo spessore dello strato limite termico cresce al crescere di (x) con legge proporzionale a ($x^{1/2}$).**

Utilizzando le relazioni (14.48) e (14.49) si ottiene che il rapporto tra gli spessori dello strato limite dinamico e di quello termico dipende soltanto dal numero di Prandtl:

$$\frac{\delta_{w,x}}{\delta_{T,x}} \approx Pr^{1/3} \quad (14.79)$$

Pertanto si ha che:

- **in regime di flusso laminare per fluidi con numero di Prandtl prossimo a (1) (gas come l'aria, liquidi poco viscosi come l'acqua, ovvero nei casi più comuni) lo strato limite dinamico e quello termico hanno spessori praticamente uguali;**

- nel caso di fluidi con numero di Prandtl molto minore di (1) (metalli liquidi) lo spessore dello strato limite dinamico è sensibilmente minore di quello dello strato limite termico;
- per i fluidi con numero di Prandtl molto maggiore di (1) (fluidi molto viscosi come olii lubrificanti, glicerina ecc.) lo spessore dello strato limite dinamico è sensibilmente maggiore di quello termico.

Nel caso di **regime di flusso turbolento** si ha che lo spessore dello strato limite di velocità è:

$$\delta_{w,x} = \delta_{w,x} = \frac{0,376}{\text{Re}_x^{1/5}} \cdot x \quad (14.80)$$

Pertanto:

- **lo spessore ($\delta_{w,x}$), in regime turbolento, cresce con legge proporzionale a ($x^{4/5}$), ovvero cresce più rapidamente rispetto allo spessore dello strato limite dinamico laminare.**

La struttura dello strato limite turbolento è completamente diversa da quello laminare. Infatti lo strato limite turbolento è costituito da un sottostrato laminare di spessore molto piccolo, all'interno del quale si ha una forte variazione della velocità del fluido, da ($w = 0$) all'interfaccia solido-fluido a un valore prossimo a (w_∞), mentre gran parte dello strato limite è occupata dalla regione turbolenta, in cui la velocità cambia poco e ha componenti trasversali (w_y) non trascurabili a causa dei vortici turbolenti.

Tutto ciò fa sì che il profilo di velocità ha pendenza molto elevata all'interno del sottostrato laminare, mentre risulta praticamente piatto nel resto dello strato limite turbolento.

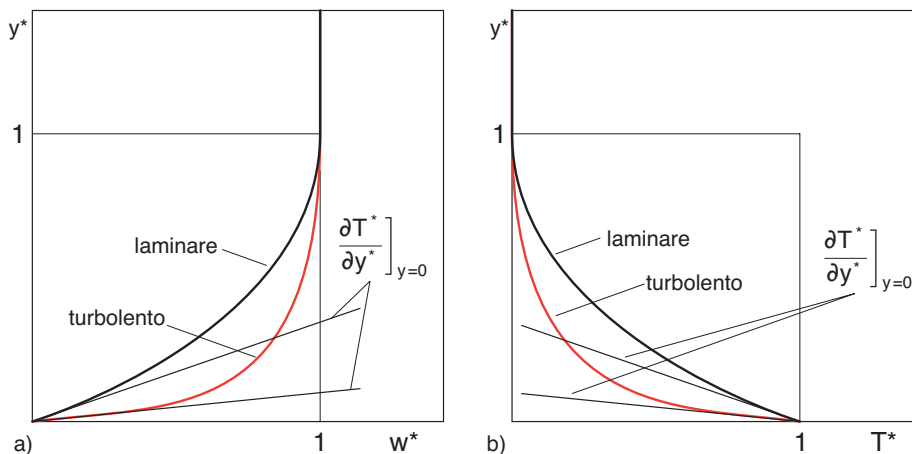


Figura 14.17

Andamento della velocità adimensionale (a) e della temperatura adimensionale (b) nello strato limite laminare (curve in nero) e nello strato limite turbolento (curve in rosso)

In Figura 14.17 sono graficati i profili della velocità adimensionale e della temperatura adimensionale nello strato limite laminare e in quello turbolento, insieme alle pendenze di tali profili all'interfaccia solido-fluido.

Si vede immediatamente che il gradiente di velocità $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}$ e quello di temperatura $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$ sono drasticamente maggiori nel caso turbolento rispetto al caso laminare. Ciò determina che il flusso turbolento provoca una maggiore dissipazione di energia meccanica a causa delle forze di attrito all'interfaccia solido-fluido, ma allo stesso tempo la turbolenza innalzerà lo scambio termico tra superficie solida e fluido.

Nel caso di **flusso laminare** lungo tutta la lastra dal bordo di attacco ($x=0$) al bordo di uscita ($x=L$) ($Re_L < 5 \cdot 10^5$), si possono utilizzare le seguenti correlazioni:

- per il calcolo del coefficiente di attrito medio:

$$\bar{C}_{f,L} = \frac{1,328}{Re_L^{1/2}}$$

- per il calcolo del numero di Nusselt medio:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{c,L} L}{\lambda} = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

da cui si ricava il coefficiente di scambio termico convettivo, in funzione del numero di Reynolds e del numero di Prandtl:

$$\bar{h}_{c,L} = \frac{\overline{Nu}_L \lambda}{L} = 0,664 \frac{\lambda}{L} Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

Nel caso di **flusso turbolento** lungo tutta la lastra dal bordo di attacco ($x=0$) al bordo di uscita ($x=L$) si possono utilizzare le seguenti correlazioni:

- per il calcolo del coefficiente di attrito medio:

$$\bar{C}_{f,L} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{f,x} dx = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}}$$

- per il calcolo del numero di Nusselt medio:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{c,L} L}{\lambda} = 0,037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$$

da cui si ricava il coefficiente di scambio termico convettivo, in funzione del numero di Reynolds e del numero di Prandtl:

$$\bar{h}_{c,L} = \frac{\overline{Nu}_L \lambda}{L} = 0,037 \frac{\lambda}{L} Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$$

Si noti che le correlazioni sopra riportate sono valide per numeri di Reynolds locali compresi tra $5 \cdot 10^3$ e 10^8 e per fluidi con numero di Prandtl compreso tra 0,6 e 60. Inoltre esse sono state ricavate ipotizzando che il regime di flusso sia turbolento su tutta la lastra. Ciò può accadere se la zona in cui il flusso è laminare è di lunghezza

trascurabile rispetto a (L) ($x_{crit} \ll L$), oppure se la turbolenza è innescata fin dall'inizio della lastra a causa di disturbi esterni, quali turbolenza nel flusso in arrivo, vibrazioni della lastra, scabrosità della superficie, presenza di turbolatori (fili, sporgenze varie inseriti in prossimità del bordo di attacco per favorire l'insorgere della turbolenza).

Se invece si ha lungo la lastra la transizione da flusso laminare a flusso turbolento in una posizione tale che (x_{crit}) non possa essere ritenuta trascurabile rispetto alla lunghezza complessiva L della lastra, allora si parla di **flusso misto laminare-turbolento**. In questo caso si possono utilizzare le seguenti correlazioni:

- per il calcolo del coefficiente di attrito medio:

$$\bar{C}_{f,L} = \frac{0,074}{\text{Re}_L^{1/5}} - \frac{1742}{\text{Re}_L}$$

- per il calcolo del numero di Nusselt medio:

$$\bar{\text{Nu}}_L = (0,037\text{Re}_L^{4/5} - 871)\text{Pr}^{1/3}$$

da cui si ricava il coefficiente di scambio termico convettivo, in funzione del numero di Reynolds e del numero di Prandtl:

$$\bar{h}_{c,L} = \frac{\lambda}{L} \bar{\text{Nu}}_L = \frac{\lambda}{L} (0,037\text{Re}_L^{4/5} - 871)\text{Pr}^{1/3}$$

Una volta noto il coefficiente ($\bar{C}_{f,L}$), e il coefficiente ($\bar{h}_{c,L}$), utilizzando le correlazioni viste sopra, si può calcolare lo sforzo tangenziale viscoso mediante la relazione ($\tau = \bar{C}_{f,L} \frac{1}{2} \rho w_\infty^2$), la forza di attrito, mediante la relazione ($F_{attr} = \tau \cdot A = \bar{C}_{f,L} A \frac{1}{2} \rho w_\infty^2$), dove (A) è l'area della lastra e la potenza termica scambiata tra lastra a temperatura (T_s) e fluido a temperatura indisturbata (T_∞) mediante la legge di Newton della convezione $\dot{Q}_c = \bar{h}_c A |T_s - T_\infty|$.

14.4.2

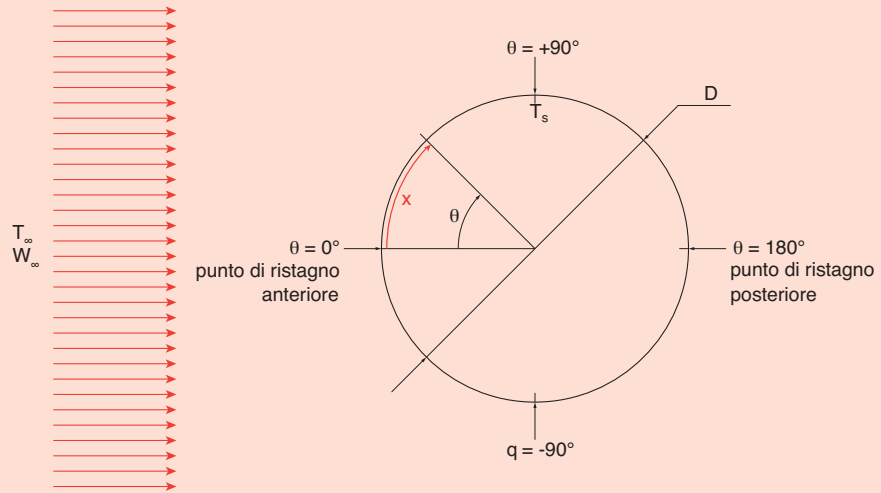
CONVEZIONE FORZATA ESTERNA SU SUPERFICIE CILINDRICA IN FLUSSO INCROCIATO

Un caso molto importante di convezione forzata esterna è quello in cui un fluido scorre sulla superficie esterna di un cilindro in flusso incrociato, ovvero in direzione perpendicolare all'asse del cilindro.

Con riferimento alla Figura 14.18, si considera un flusso forzato di un fluido newtoniano che investe ortogonalmente (cross-flow), con velocità indisturbata (w_∞), la superficie esterna di un cilindro avente diametro (D) e lunghezza (L), con ($L \gg D$) in modo tale da poter considerare che il flusso sia essenzialmente bidimensionale.

Figura 14.18

Flusso forzato esterno su superficie cilindrica: geometria del sistema e nomenclatura. T_∞ e w_∞ sono, rispettivamente, la temperatura e la velocità di fluido indisturbato, T_s è la temperatura della superficie del cilindro, θ e x sono, rispettivamente l'angolo e la coordinata curvilinea che individuano la posizione generica sulla superficie del cilindro a partire dal punto di ristagno anteriore, in cui si ha $\theta = 0^\circ$ e $x = 0$



La superficie del cilindro è mantenuta a una temperatura costante e uniforme (T_s) mentre la temperatura del fluido indisturbato è (T_∞). La potenza termica \dot{Q}_c scambiata tra cilindro e fluido può essere calcolata con la legge di Newton della convezione:

$$\dot{Q}_c = \bar{h}_c A (T_s - T_\infty)$$

dove ($A = 2\pi rL$) è l'area della superficie laterale del cilindro e (\bar{h}_c) è il coefficiente medio di scambio termico convettivo. Se si ipotizza che (A), (T_s) e (T_∞) siano dati di progetto noti, il problema è anche in questo caso la determinazione di (\bar{h}_c) che potrà essere ricavato determinando il numero di Nusselt medio (Nu_D), che poiché siamo in presenza di un problema di convezione forzata, sarà una funzione del numero di Reynolds (Re_D) e del numero di Prandtl. In questo caso sia il numero di Nusselt che il numero di Reynolds sono riferiti alla lunghezza caratteristica (D), ovvero al diametro del cilindro:

$$Re_D = \frac{\rho w_\infty D}{\mu} \quad (14.81)$$

$$Nu_D = \frac{\bar{h}_c D}{\lambda} \quad (14.82a)$$

A sua volta il numero di Nusselt medio potrà essere determinato per integrazione sulla superficie laterale del cilindro del numero di Nusselt locale definito come

$$Nu_x = \frac{h_{c,x} x}{\lambda} \quad (14.82b)$$

dove ($h_{c,x}$) è il coefficiente locale di scambio termico convettivo e (x) è la coordinata curvilinea sulla superficie cilindrica, sottesa da un angolo (θ), assumendo ($\theta = 0$) nel cosiddetto punto di ristagno anteriore (Figura 14.18).

Ovviamente lo scambio termico e quindi il coefficiente di scambio termico convettivo dipendono strettamente dalla situazione fluidodinamica che si instaura per effetto dell'interazione tra fluido e superficie solida, che nel caso di un cilindro presenta differenze sostanziali rispetto al caso del flusso su superficie piana.

Nel Paragrafo precedente si è visto che su una superficie piana la velocità di fluido indisturbato al di fuori dello strato limite resta costante, come previsto dalla legge di Bernoulli, che per un fluido inviscido, incompressibile e in assenza di forze di volume è espressa da:

$$p + \frac{1}{2} \rho w_{\infty}^2 = \text{costante}$$

Sempre utilizzando questa legge si ricava che se la velocità (w_{∞}) è costante lo è anche la pressione nella direzione del moto. Ovvero nel caso di flusso lungo una lastra piana il gradiente di pressione nella direzione del moto è nullo: ($\partial p / \partial x = 0$).

Nel caso del flusso su un cilindro, per effetto della curvatura della superficie, la velocità ($w_{\infty}(x)$) non si mantiene più costante ma aumenta dal valore nullo in ($x = 0$), ovvero per ($\theta = 0$), fino a un valore massimo in corrispondenza di ($\theta = \pm 90^\circ$). Poiché la velocità aumenta, applicando la legge di Bernoulli si ricava che la pressione diminuisce, cioè in questa zona si ha un gradiente di pressione negativo ($\partial p / \partial x < 0$). È proprio questo gradiente di pressione che fornisce l'accelerazione necessaria per aumentare la velocità del fluido.

Per angoli (θ maggiori di $\pm 90^\circ$) la situazione fluidodinamica cambia: la velocità tende a diminuire e si porta di nuovo a zero in corrispondenza del punto di ristagno posteriore e quindi la pressione tende ad aumentare all'aumentare di (x) e, quindi, la velocità diminuisce sotto l'effetto del gradiente positivo di pressione ($\partial p / \partial x > 0$) (Figura 14.19).

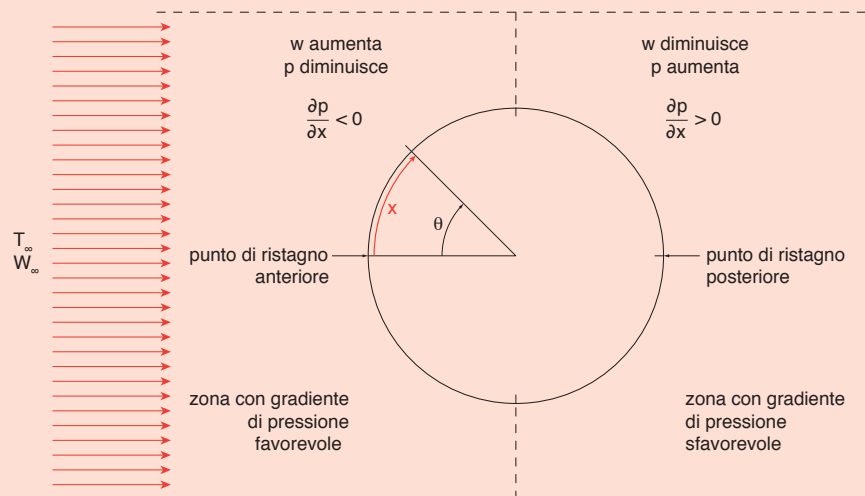


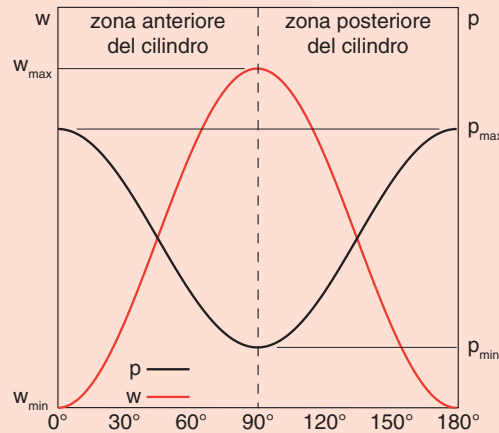
Figura 14.19
Flusso forzato esterno su superficie cilindrica: andamento qualitativo della velocità e della pressione

Pertanto, sia la distribuzione di velocità che quella della pressione hanno un andamento perfettamente simmetrico rispetto alle posizioni ($\theta = \pm 90^\circ$) (Figura

14.20). Il fatto che la distribuzione di pressione sia simmetrica nella parte anteriore ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) e in quella posteriore ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) fa sì che la forza esercitata dalla pressione nella parte anteriore sia esattamente equilibrata da quella esercitata nella parte posteriore.

In realtà questa situazione ideale è puramente teorica e non si verifica quasi mai nelle situazioni pratiche. Infatti essa richiederebbe che le linee di corrente del flusso nella parte posteriore del cilindro riuscissero a mantenersi aderenti alla superficie.

Figura 14.20
Distribuzione ideale di pressione e di velocità (curva in rosso) sulla superficie di un cilindro con flusso forzato esterno



È stato dimostrato sperimentalmente che in realtà tale situazione si verifica soltanto se il numero di Reynolds (Re_D) è molto piccolo, quindi per velocità del flusso incidente bassissima e/o diametro del cilindro molto piccolo e/o fluido estremamente viscoso. Un valore orientativo è ($Re_D \sim 2$), caso questo estremamente raro nelle applicazioni ingegneristiche.

Per numeri di Reynolds maggiori, la situazione fluidodinamica è drasticamente diversa. Infatti lungo la superficie del cilindro si ha la formazione di uno strato limite dinamico. Per ($Re_D < 2 \cdot 10^5$) lo strato limite si mantiene laminare, mentre per ($Re_D > 2 \cdot 10^5$) si ha la transizione a strato limite turbolento.

Nella zona in cui si ha gradiente di pressione sfavorevole, la velocità delle particelle di fluido all'interno dello strato limite più vicine alla superficie solida, sotto l'effetto combinato degli intensi sforzi viscosi che si oppongono al moto e del gradiente di pressione positivo che dà luogo anche esso a un'azione decelerante, dapprima diventa nulla e poi diventa negativa. In altri termini si forma a contatto della superficie solida una regione in cui le particelle di fluido si muovono in direzione opposta a quella del flusso principale provocando il **distacco dello strato limite** dalla superficie e la formazione di una coda vorticoso che si propaga a valle del cilindro stesso.

Riassumendo si può schematizzare quanto descritto sopra nel modo seguente:

- se ($Re_D < 2$) ogni effetto di separazione dello strato limite è trascurabile e la situazione di flusso è quella indicata in Figura 14.21a;
- se ($2 < Re_D < 2 \cdot 10^5$) lo strato limite è laminare e sperimentalmente è stato dimostrato che il distacco avviene a un angolo ($\theta_{sep} \approx 80^\circ$) (Figura 14.21b);

- se ($Re_D > 2 \cdot 10^5$) si ha la transizione alla turbolenza e poiché il flusso turbolento è più energetico di quello laminare il distacco dello strato limite avviene a un angolo ($\theta_{sep} \approx 140^\circ$), ovvero più in avanti rispetto alla posizione in cui si distaccherebbe lo strato limite laminare (Figura 14.21c).

Il distacco dello strato limite con la conseguente formazione della coda turbolenta influenza fortemente sia lo scambio termico che il campo di moto e la distribuzione della pressione lungo la superficie cilindrica.

In particolare, per quanto riguarda la distribuzione di pressione nel caso illustrato in Figura 14.21a, ovvero in assenza di effetti di distacco dello strato limite, la pressione nella zona posteriore del cilindro sarebbe uguale a quella nella zona anteriore. In questo caso la forza di resistenza (F_D) che agisce sulla superficie solida coinciderebbe con la sola forza viscosa (F_{attr}).

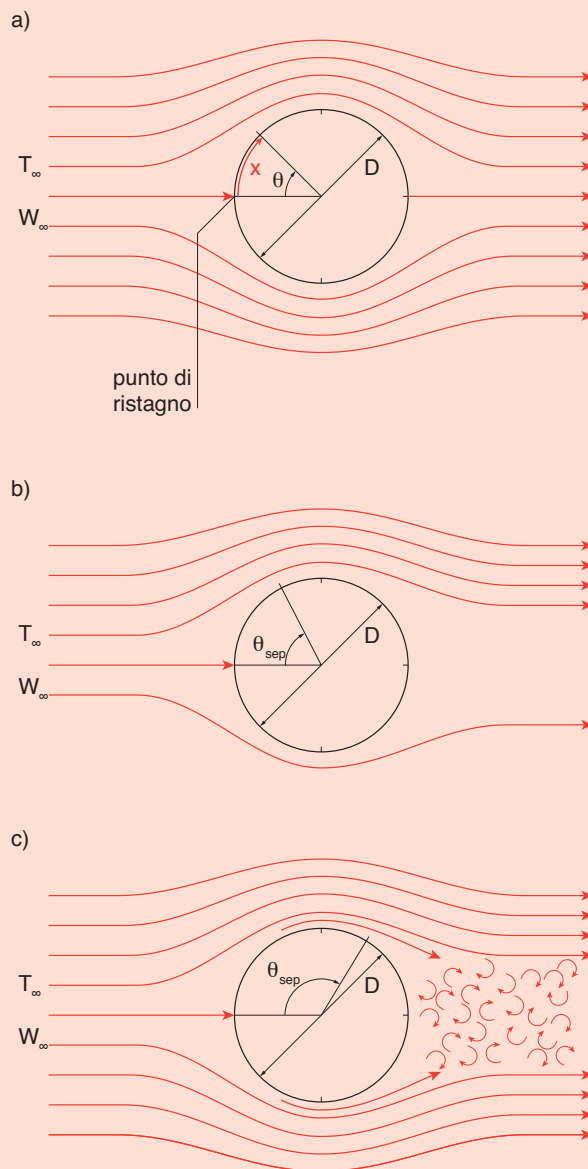


Figura 14.21

Flusso forzato esterno su superficie cilindrica
 (a) $Re_D < 2$ (separazione trascurabile)
 (b) $Re_D < 2 \cdot 10^5$ strato limite laminare, separazione in $\theta_{sep} \sim 80^\circ$
 (c) $Re_D > 2 \cdot 10^5$ transizione alla turbolenza, separazione in $\theta_{sep} \sim 140^\circ$

Al contrario, in presenza di distacco dello strato limite, ovvero nella maggior parte dei casi di interesse ingegneristico, non si ha completo recupero di pressione dal punto di distacco in poi. Per questo la pressione nella zona posteriore del cilindro non è più uguale a quella nella zona anteriore ma può essere anche drasticamente più bassa.

Ciò fa apparire una forza di resistenza aggiuntiva rispetto a quella viscosa che viene chiamata resistenza di pressione (o di forma) (F_{press}). Pertanto la resistenza totale (F_D) è data da:

$$F_D = F_{attr} + F_{press} \quad (14.82)$$

dove, per corpi aventi area non troppo grande e forma poco aerodinamica, come tubi cilindrici, sfere, corpi tozzi ecc., la forza di pressione può essere nettamente superiore rispetto alla forza di attrito viscoso.

La forza di resistenza totale (F_D) può essere calcolata come:

$$F_D = C_D A_r \left(\frac{1}{2} \rho w_\infty^2 \right) \quad (14.83)$$

dove (A_r) è l'area della superficie frontale del cilindro, ovvero della superficie perpendicolare al flusso incidente ($A_r = D \cdot L$), dove (L) è la lunghezza del cilindro.

(C_D) è il coefficiente adimensionale di resistenza, ricavabile sperimentalmente utilizzando la relazione (14.56) e misurando la forza di resistenza (F_D) subita dal cilindro in diverse condizioni di misura:

$$C_D = \frac{F_D}{A_r \left(\frac{1}{2} \rho w_\infty^2 \right)} \quad (14.84)$$

(C_D) è funzione del numero di Reynolds:

- per ($Re_D < 2$) praticamente non si ha separazione dello strato limite e nella resistenza (F_D) la componente viscosa (F_{attr}) è assolutamente predominante;
- all'aumentare del numero di Reynolds gli effetti della resistenza di pressione (F_{press}) diventano sempre più importanti, per poi subire una brusca riduzione per ($Re_D > 2 \cdot 10^5$) grazie alla transizione alla turbolenza e quindi al ritardo nel fenomeno della separazione dello strato limite e della formazione della scia vorticoso.

Per quanto riguarda il **processo di scambio termico** anche esso viene fortemente influenzato dal complesso andamento della situazione fluidodinamica attorno al cilindro.

Se si fa riferimento al **numero di Nusselt locale** (Nu_θ) si trova che aumenta all'aumentare del numero di Reynolds, però con un andamento in funzione di θ per cui:

- per ($Re_D < \sim 10^5$), il regime di flusso è laminare e (Nu_θ) diminuisce all'aumentare dell'angolo (θ) da 0° a 80° . In questa posizione (Nu_θ) ha un minimo dopo di che si ha la separazione dello strato limite con conseguente aumento di (Nu_θ) per effetto del mescolamento del fluido dovuto alla formazione della coda vorticoso;

- per ($Re_D > \sim 10^5$), si ha transizione dello strato limite da laminare a turbolento e (Nu_θ) presenta due minimi e due massimi: il primo massimo è in corrispondenza del punto di ristagno anteriore dopo di che (Nu_θ) diminuisce a causa dell'aumento dello spessore dello strato limite laminare; quando si ha la transizione alla turbolenza (Nu_θ) ha un drastico aumento a seguito dell'innalzamento dello scambio termico dovuto al mescolamento vorticoso, per poi diminuire con l'aumento dello spessore dello strato limite turbolento. (Nu_θ) presenta raggiunge un secondo valore minimo per poi aumentare di nuovo in corrispondenza del punto di distacco dello strato limite turbolento ($\theta \sim 140^\circ$) e della formazione della scia vorticoso.

Pertanto mentre dal punto di vista dinamico il distacco dello strato limite ha sempre un effetto negativo perché aumenta la forza di resistenza, dal punto di vista termico, se l'obiettivo è scambiare calore tra superficie solida e fluido, il distacco con conseguente formazione della scia vorticoso ha un effetto positivo in quanto aumenta il coefficiente di scambio termico convettivo.

Come si può desumere dalla discussione precedente l'andamento del numero di Nusselt locale, quindi del coefficiente di scambio termico convettivo locale, è molto complicato, ma a scopo progettuale si è generalmente interessati allo scambio termico complessivo tra l'intera superficie cilindrica e il fluido che scorre su di essa. Perciò, si può fare riferimento direttamente al numero di Nusselt medio ($\overline{Nu_D}$), da cui potremo ricavare il coefficiente medio di scambio termico convettivo ($\overline{h_D} = \overline{Nu_D} \lambda / D$) da utilizzare nella legge di Newton della convezione ($\dot{Q}_c = \overline{h_c} A (T_s - T_\infty)$).

In letteratura tecnica si trovano numerose correlazioni di uso pratico per il calcolo del numero di Nusselt medio in funzione del numero di Reynolds e del numero di Prandtl che assumono la solita struttura del tipo:

$$\overline{Nu_D} = C Re^n Pr^m$$

Quasi tutte le correlazioni hanno il difetto che il coefficiente (C) e l'esponente (m) assumono valori diversi in diversi range di valori del numero di Reynolds. Una correlazione relativamente recente, che presenta una struttura complicata ma che copre un intero e ampio range di valori di (Re_D) è quella ottenuta sperimentalmente da Churchill e Bernstein:

$$\overline{Nu_D} = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{3/5} \quad (14.85)$$

La correlazione è valida per ($Re_D \cdot Pr > 0,2$) e in essa tutte le proprietà fisiche del fluido sono determinate alla temperatura di film ($T_{film} = (T_s + T_\infty)/2$).

14.8 INTRODUZIONE ALLA FLUIDODINAMICA DELLA CIRCOLAZIONE CARDIOVASCOLARE UMANA

Questo paragrafo dedicato a una trattazione di primo approccio al complesso argomento della fluidodinamica del sistema circolatorio umano può risultare di interesse per gli studenti dei corsi di laurea in Ingegneria Biomedica.

Dopo una parte introduttiva dedicata a una sommaria descrizione dell'apparato cardiovascolare e alle caratteristiche reologiche del sangue umano, l'attenzione è concentrata sulla meccanica del flusso sanguigno essenzialmente a livello delle arterie.

Dal punto di vista fisico verranno utilizzati i principi generali dell'idrodinamica ricavati in precedenza per sistemi impiantistici di largo uso in ingegneria, anche se questo impedisce una descrizione quantitativa precisa della fluidodinamica del sistema circolatorio umano.

Infatti, questo presenta caratteristiche quali:

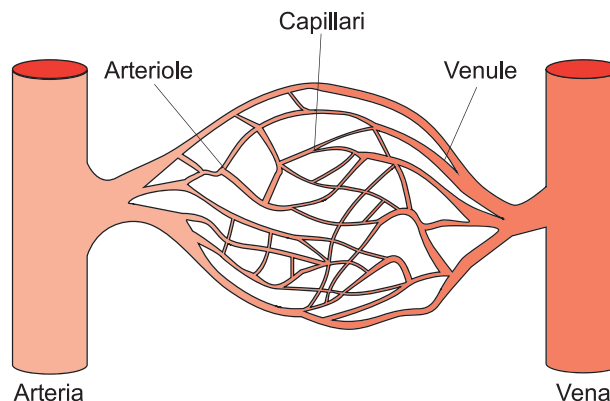
- condotti elastici e non rigidi;
- tratti di circuito (i capillari) che consentono fuoriuscita e ingresso di materia;
- un propulsore (il cuore) con attività intermittente;
- pressione esterna ai condotti che può determinare, a causa dell'elasticità dei condotti, modificazioni del loro diametro;
- un fluido in movimento (il sangue) che in generale dovrebbe essere considerato non-newtoniano, cioè con viscosità che varia al variare della velocità di flusso;

che differiscono dalle ipotesi semplificative poste alla base della trattazione fatta per circuiti idraulici con condotti rigidi, aventi sezione costante e in regime stazionario percorsi da un fluido newtoniano.

14.8.1 L'APPARATO CARDIOVASCOLARE

L'apparato cardiovascolare è costituito dal cuore e da una ramificazione di vasi sanguigni che portano il sangue al cuore (chiamati vene) o che lo portano via dal cuore (chiamati arterie). I vasi sanguigni aumentano di numero e si riducono di sezione (dalle grandi arterie fino ai capillari) per poi ritornare al cuore dopo essersi ridotti di numero e aumentati di sezione (dai capillari alle grosse vene).

Figura 14.32
Schema del
sistema Arteria-
Arteriole-Capillari-
Venule-Vena



I capillari sono vasi sanguigni di dimensioni molto piccole (il loro diametro è variabile da circa $5\text{ }\mu\text{m}$ a circa $30\text{ }\mu\text{m}$) che permettono gli scambi metabolici e respiratori tra sangue e tessuti. Le arterie sono collegate ai vasi capillari mediante le arteriole e i vasi capillari riunendosi in una fitta rete formano le venule post-capillari, che si collegano alle vene.

Il cuore, illustrato in forma schematica in Figura 14.33, è formato da fibre muscolari in grado di contrarsi e da cellule cardiache in grado di generare gli impulsi nervosi che innescano le contrazioni e quindi il cosiddetto battito cardiaco che consente la circolazione sanguigna.

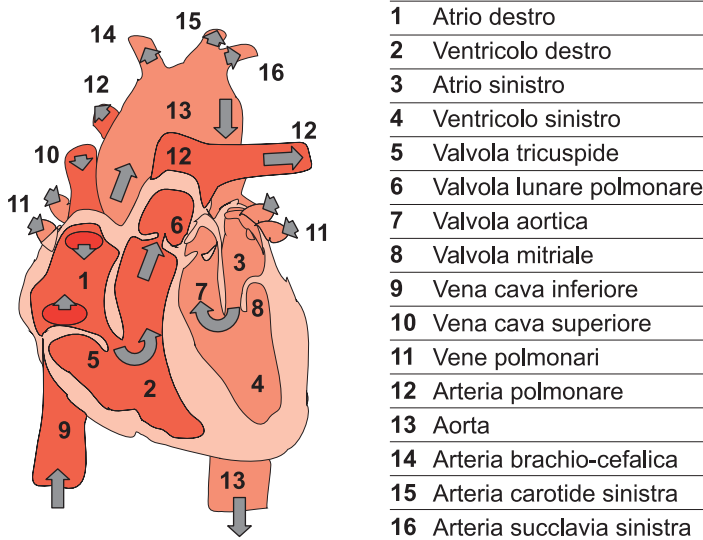


Figura 14.33
Diagramma
schematico del
cuore

Il cuore è un organo cavo costituito da due sezioni (la destra e la sinistra, dette anche cuore destro e cuore sinistro) divise da un setto. Ogni sezione è costituita da due cavità: quella superiore, detta atrio, e quella inferiore, detta ventricolo, che comunicano mediante un orifizio munito di una valvola cardiaca (la valvola tricuspidale nel cuore destro, e la valvola mitriale nel sinistro).

Grazie alla sua capacità di contrarsi il cuore è assimilabile a una pompa la cui funzione principale è duplice:

1. raccogliere il sangue venoso ricco di anidride carbonica proveniente dalle vene cave inferiore e superiore (9 e 10 in Figura 14.33) nell'atrio destro (1 in Figura 14.33), trasferirlo attraverso la valvola tricuspidale (5 in Figura 14.33) nel ventricolo destro (2 in Figura 14.33) e da qui attraverso la valvola lunare (6 in Figura 14.33) immetterlo nelle arterie polmonari (12 in Figura 14.33) mediante le quali il sangue viene portato ai polmoni, dove avviene lo scambio gassoso con l'ossigeno presente nell'aria esterna inspirata mentre l'anidride carbonica viene eliminata mediante l'espirazione;
2. raccogliere il sangue ossigenato nei polmoni proveniente dalle vene polmonari (11 in Figura 14.33) nell'atrio sinistro (3 in Figura 14.33), trasferirlo attraverso la valvola mitriale (8 in Figura 14.33) nel ventricolo sinistro (4 in Figura 14.33)

e da qui, attraverso la valvola aortica, il sangue viene immesso nell'arteria aorta, per poi essere distribuito verso tutti gli organi e i tessuti del corpo umano.

Ciò avviene mediante il cosiddetto ciclo cardiaco, costituito da due fasi:

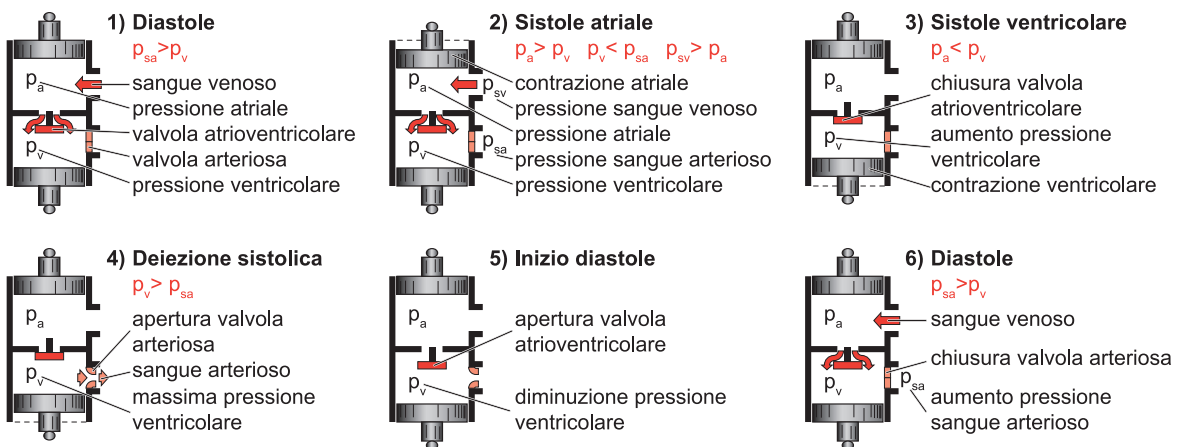
- la **diastole**, con rilassamento delle fibre muscolari cardiache;
- la **sistole**, durante la quale si ha una contrazione delle fibre muscolari cardiache.

All'inizio della diastole, sia i muscoli atriali che quelli ventricolari sono rilassati, con conseguente diminuzione della pressione sia atriale che ventricolare. Il sangue entra nell'atrio destro dalle vene cave e nell'atrio sinistro dalle vene polmonari. Le valvole atrio-ventricolari (la mitrale tra atrio e ventricolo sinistri, la tricuspide tra atrio e ventricolo destri) sono aperte, per cui il sangue fluisce nei ventricoli aumentando il volume ventricolare.

L'attivazione della sistole atriale con la contrazione dei muscoli atriali completa il riempimento dei ventricoli. **La sistole ventricolare**, consistente nella contrazione dei muscoli ventricolari, dà luogo a un processo di compressione: la pressione nei ventricoli aumenta con conseguente chiusura delle valvole atrio-ventricolare, il che evita il reflusso di sangue negli atri e fa sì che, essendo chiuse anche le valvole polmonare e aortica, la compressione sia isovolumica, ovvero a volume costante. Pertanto, la pressione all'interno dei ventricoli aumenta e, quando diventa più alta della pressione arteriosa, le valvole polmonare e aortica si aprono e il sangue fluisce nelle arterie polmonare e aortica, alimentando così la circolazione polmonare e sistemica.

Alla fine della sistole, i muscoli ventricolari si rilassano (inizia la nuova diastole), la pressione nei ventricoli diminuisce e quando diventa più bassa di quella arteriosa si ha la chiusura delle valvole polmonare e aortica, il che impedisce il reflusso di sangue arterioso nei ventricoli. Man mano che continua il rilassamento isovolumico muscolare, la pressione ventricolare diventa più bassa di quella atriale con conseguente apertura delle valvole atrio-ventricolari e il cuore è pronto a iniziare un nuovo ciclo.

Figura 14.34
Rappresentazione
schematica delle
fasi del ciclo
cardiaco



Si noti (e non ci si faccia trarre in inganno) che lo schema riportato in Figura 14.34 è fortemente semplificato, almeno per due ragioni principali:

- i processi di espansione e compressione nell'atrio e nel ventricolo vengono rappresentati con il simbolo del sistema cilindro-pressione già largamente utilizzato in numerose applicazioni ingegneristiche. Ciò potrebbe fare erroneamente pensare che tali processi siano volumetrici, cosa assolutamente non vera nel caso del cuore. Infatti, come detto più volte nella descrizione, il rilassamento e la contrazione dei muscoli cardiaci danno luogo a processi isovolumetrici cioè a volume costante. Il volume delle camere varia in occasione del loro svuotamento o riempimento ma i processi di rilassamento e contrazione muscolare avvengono a volume costante, tanto più che le fibre muscolari cardiache operano su un fluido incompressibile come il sangue;
- gli effetti sopra descritti sono illustrati su una sola metà del cuore, il che può fare pensare che ciò che avviene nel cuore destro sia esattamente uguale a quanto avviene nella parte sinistra. In realtà, gli effetti non avvengono in modo perfettamente simmetrico nel cuore destro e in quello sinistro: soprattutto l'aumento di pressione nella fase sistolica è molto più elevata nel ventricolo sinistro che deve vincere le forti perdite di carico dovute al flusso del sangue nei vari organi interni e nei tessuti, mentre la resistenza idraulica nei polmoni è molto minore per cui è anche drasticamente minore l'aumento di pressione nella fase sistolica del ventricolo destro.

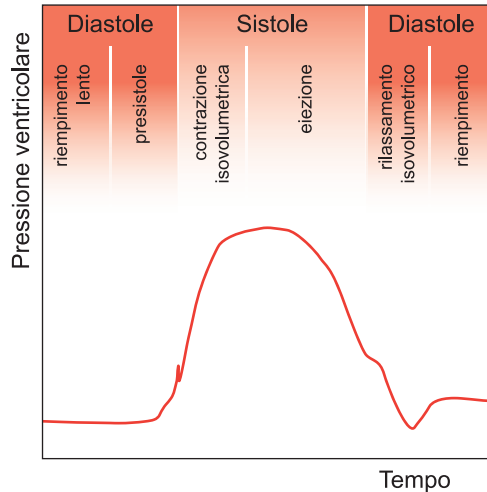


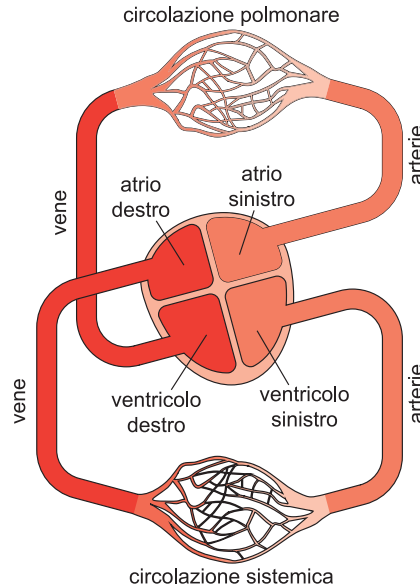
Figura 14.35
Andamento
qualitativo
della pressione
ventricolare durante
un ciclo cardiaco

L'apparato cardiovascolare si configura quindi come un circuito idraulico costituito da condotti e provvisto di un propulsore: il cuore.

Come si evince dalla discussione precedente si hanno due circuiti vascolari (Figura 14.36): la grande circolazione o **circolazione sistemica**, che parte dal ventricolo sinistro che contraendosi spinge il sangue ricco di ossigeno nell'aorta e quindi in tutte le arterie del corpo che alimentano i diversi tessuti e apparati. Da questi, attraverso il sistema delle vene cave, il sangue raggiunge l'atrio destro del cuore e, quindi, il ventricolo destro dal quale inizia la piccola circolazione o **circolazione**

polmonare. Il sangue viene pompato, tramite l'arteria polmonare, nei polmoni dove cede l'anidride carbonica e si arricchisce di ossigeno. Tramite le vene polmonari raggiunge l'atrio sinistro del cuore e da qui riparte la circolazione sistemica.

Figura 14.36
Schema
del sistema
cardiocircolatorio



Riassumendo, le funzioni fondamentali della circolazione sanguigna sono due:

- il sangue raccoglie ossigeno nei polmoni e nutrienti nell'intestino e smaltisce anidride carbonica nei polmoni e altri prodotti di scarto nei reni;
- il sangue circolando all'interno degli organi vitali (come il cuore, i reni, il fegato, il cervello) li mantiene a temperatura costante cedendo o asportando calore mediante lo scambio termico convettivo con le pareti dei vasi e una dissipazione di calore per convezione e irraggiamento dalla pelle verso l'ambiente esterno.

Il volume di sangue espulso dal cuore in una contrazione è detta **gittata sistolica**: il range normale va da 68 a 100 ml. Il prodotto della gittata sistolica per la frequenza cardiaca è la gittata cardiaca o **flusso sanguigno**. La frequenza cardiaca media a riposo è 72 battiti/minuto, con un range di valori normali di 60-86 battiti/minuto.

La portata volumetrica cardiaca media (**flusso sanguigno medio**) a riposo in individui di età compresa tra 16 e 60 anni è circa 6,5 litri/minuto.

14.8.2 IL SANGUE

Il sangue umano è un tessuto costituito da una sospensione di diversi elementi in una soluzione acquosa, chiamata **plasma**, che ha la funzione principale di trasportare i diversi componenti nell'organismo. Gli elementi corpuscolati (o cellule ematiche) sono:

- **eritrociti** (o globuli rossi): sono il componente principale, contengono l'emoglobina, una proteina in grado di legare l'ossigeno in modo reversibile;

- **leucociti** (o globuli bianchi) e **trombociti** (o piastrine), che hanno funzioni di tipo immunitario, globalmente occupano una piccola frazione del volume del sangue e il loro effetto sul comportamento reologico del sangue è praticamente trascurabile.

Il volume del sangue umano è costituito normalmente per circa il 55% da plasma, mentre il resto è costituito da elementi corpuscolati. Questi sono costituiti per circa il 95% da globuli rossi, per circa lo 0,1% da globuli bianchi e circa il 4,9% da piastrine.

Il rapporto percentuale in volume occupato dagli elementi corpuscolati (e quindi di soprattutto della presenza di globuli rossi) è detto **ematocrito** (H_t), il cui valore normale per il sangue umano varia tra il 40% e il 45%.

L'ematocrito influenza sia la capacità di trasporto dell'ossigeno sia la reologia del sangue: in particolare, sia la capacità di trasporto dell'ossigeno sia la viscosità del sangue aumentano all'aumentare dell'ematocrito.

Per quanto riguarda la **reologia del sangue** va preliminarmente sottolineato che il sangue stesso presenta caratteristiche che dipendono dall'accuratezza e approfondimento dell'analisi utilizzata per descriverlo, per cui non esiste un modello applicabile a ogni situazione di moto.

Ad esempio, come si desume dalla sua composizione, il sangue non può essere considerato un fluido omogeneo. però, nei grandi vasi sanguigni tale ipotesi può essere considerata valida, con buona approssimazione. Infatti, il diametro medio di un eritrocita è circa $8 \mu\text{m} = 0,008 \text{ mm}$, molto minore del diametro tipico di un'arteria (da 45 mm a circa 0,150 mm) o di una vena (da circa 0,3 mm a circa 14 mm), per cui si può considerare il sangue come un fluido omogeneo almeno fino al livello delle arteriole e delle venule (ovvero i tratti terminali che collegano alle reti capillari, rispettivamente, le arterie e le vene).

La **densità del sangue** intero è funzione dell'ematocrito H_t , mentre, in prima approssimazione, può essere considerata indipendente da temperatura e pressione e può essere calcolata, indicando con ρ_p la densità del plasma e con ρ_{gr} la densità della parte corpuscolata, mediante la relazione:

$$\rho_s = (1 - H_t)\rho_p + H_t\rho_{gr} \quad (14.146)$$

In condizioni normali si ha $\rho_p \approx 1035 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$ e $\rho_{gr} \approx 1090 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$, per cui il sangue di un adulto con $H_t = 45\%$ ha densità:

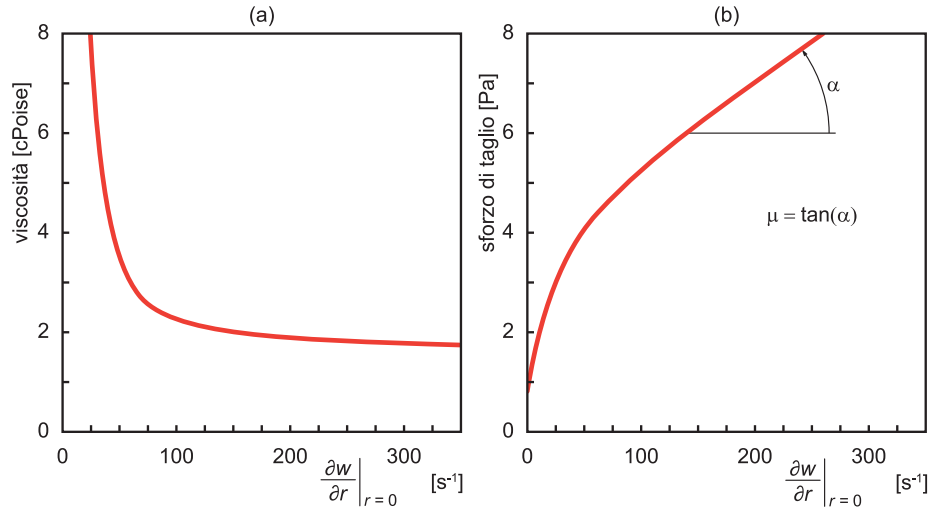
$$\rho_s \cong (1 - 0,45)1035 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,45 \cdot 1090 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1060 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Per quanto riguarda la **viscosità del sangue** si è già detto che aumenta all'aumentare dell'ematocrito. Un'analisi della dipendenza della viscosità dal gradiente di velocità radiale $\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=0}$ mostra l'andamento riportato nel grafico di Figura 14.37a, mentre la dipendenza dello sforzo di taglio dal gradiente di velocità radiale è riportata nel grafico di Figura 14.37b.

Ricordando che in un fluido newtoniano la viscosità è indipendente dal gradiente di velocità radiale e che la relazione tra sforzo di taglio e il gradiente di velocità è rappresentato da una retta passante per l'origine, si evince in modo

evidente che il sangue non si comporta sempre come un fluido newtoniano (vedi Paragrafo 14.2.3.2).

Figura 14.36
Dipendenza dal
gradiente di
velocità radiale
della viscosità del
sangue (a) e dello
sforzo di taglio (b)



In particolare, il modello di fluido omogeneo newtoniano non risulta più applicabile in due casi:

- flusso in vasi di grandi dimensioni (diametro maggiore di 0,3 mm) e a basso gradiente di velocità radiale;
- flusso in vasi di piccole dimensioni (diametro minore di 0,3 mm) e ad alto gradiente di velocità radiale.

Risulta quindi evidente che non è possibile utilizzare un'espressione univoca per le caratteristiche reologiche del sangue:

- nel caso di comportamento di tipo newtoniano si può assumere con buona approssimazione, che la viscosità del sangue vari nel range $3 \div 4 \text{ [cPoise]} = 3 \times 10^{-3} \div 4 \times 10^{-3} \text{ [Pa s]}$;
- nel caso di comportamento non-newtoniano un modello molto utilizzato è quello di fluido di Casson (vedi Paragrafo 14.2.3.3).

14.8.3 MODELLI A FLUSSO STAZIONARIO DELLA CIRCOLAZIONE SANGUIGNA

Come già anticipato nell'introduzione al paragrafo 14.8, i modelli più semplici per studiare la fluidodinamica della circolazione cardiovascolare sono quelli basati sull'ipotesi di flusso stazionario.

Tale ipotesi, infatti, evita le notevoli complicazioni connesse con la dipendenza dal tempo delle equazioni che governano la fluidodinamica del flusso sanguigno.

In realtà, il flusso reale, seguendo il ciclo cardiaco pulsatile, è, ovviamente, non stazionario. Nonostante ciò, i modelli basati sull'ipotesi di flusso stazionario forniscono risultati che descrivono con buona approssimazione le grandezze che in-

fluenzano l'andamento della pressione sanguigna e della resistenza idraulica nel sistema circolatorio e spiegano alcuni importanti fenomeni, quale, ad esempio, il sistema di termoregolazione del corpo umano, così importante nello studio del comfort termoigrometrico negli ambienti costruiti e climatizzati.

Si noti che per pressione sanguigna si intende la pressione del sangue sulle pareti del vaso, intesa non come pressione assoluta ma come pressione differenziale, relativa alla pressione atmosferica.

Viene generalmente espressa e misurata in millimetri di mercurio, [mmHg], e varia a seconda dei diversi distretti vascolari.

14.8.3.1 IL MODELLO DI HAGEN-POISEUILLE DELLA CIRCOLAZIONE SANGUIGNA

Un modello semplificato, detto di **Hagen-Poiseuille**, per la determinazione delle caratteristiche della circolazione sanguigna, è basato sulle seguenti ipotesi:

1. comportamento del sangue come fluido Newtoniano;
2. flusso stazionario;
3. flusso laminare pienamente sviluppato;
4. vasi sanguigni come tubi rigidi rettilinei con sezione costante circolare.

Nei limiti di validità di tali ipotesi semplificative, si ha un flusso, detto di **Hagen-Poiseuille**, la cui portata volumetrica di fluido è data dalla **legge di Poiseuille**:

$$\dot{V} = \overline{u(r)}A = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 \mu L} \quad (14.147)$$

dove:

- \dot{V} è la portata volumetrica di fluido [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$];
- $\overline{u(r)}$ è la velocità media del fluido [m s^{-1}] attraverso la sezione A del tubo [m^2];
- $\Delta p = p_1 - p_2$ è la caduta di pressione tra la sezione 1 e la sezione 2 del tubo [Pa];
- μ = viscosità del sangue [Pa s]
- D e L sono, rispettivamente diametro e lunghezza del tubo [m].

Conoscendo la sezione del tubo e la velocità media di flusso sarà nota la portata volumetrica e quindi la caduta di pressione lungo il vaso sanguigno si può calcolare come:

$$\Delta p = R_{idr} \dot{V} = \frac{128 \mu L \dot{V}}{\pi D^4} \quad (14.148)$$

dove

$$R_{idr} = \frac{128 \mu L}{\pi D^4} \quad (14.149)$$

è la resistenza viscosa tra fluido e parete del vaso (**resistenza vascolare**).

Le equazioni (14.149) per la resistenza vascolare e (14.148) per la caduta di pressione mostrano che entrambe aumentano all'aumentare della lunghezza del vaso e al diminuire della sua sezione.

È del tutto evidente che quando il sangue scorre lungo i vasi del sistema circolatorio la pressione diminuisce a causa degli effetti viscosi e quindi della resistenza idraulica opposta al moto del fluido. Infatti, la pressione media aortica è di circa 90 mmHg mentre la pressione nella vena cava a livello del cuore è praticamente nulla (~ 5 mmHg). Questa variazione di pressione, come in ogni circuito idraulico, deve essere compensata dal propulsore (in questo caso il cuore) che quindi fornisce al sistema circolatorio l'energia necessaria per vincere le cadute di pressione dovute alle forze viscosi.

Poiché, la resistenza idraulica è inversamente proporzionale alla quarta potenza del diametro del vaso, essa è concentrata soprattutto nei vasi periferici che hanno dimensioni più piccole (le arteriole, i capillari e le venule)

Inoltre, poiché sia la caduta di pressione che la resistenza idraulica dipendono dalla quarta potenza del diametro D della sezione anche una piccola variazione di tale diametro può influire sensibilmente sul loro valore.

Questo risultato è di grande importanza, poiché mostra che la resistenza vascolare può essere controllata in modo efficace modificando la sezione del vaso. Ciò viene effettuato, ad esempio, dal sistema nervoso che controlla la tensione dei muscoli lisci nelle pareti delle arteriole, in modo tale da alterare selettivamente il flusso del sangue nelle varie regioni del corpo umano mediante incrementi o diminuzioni della sezione delle arteriole che convogliano il sangue in tali regioni.

Un primo importante esempio di tali alterazioni regionali selettive si ha con il **meccanismo di termoregolazione** che il corpo umano attiva nel caso di sensazione di caldo o di freddo. In realtà, come si vedrà in dettaglio nel capitolo dedicato al comfort termoisolante, tali sensazioni sono legate a una tendenza alla diminuzione (sensazione di freddo) o all'aumento (sensazione di caldo) dell'energia interna (quindi della temperatura interna) del corpo umano a causa di uno squilibrio tra l'energia prodotta dal metabolismo e quella dissipata dalla superficie del corpo verso l'ambiente circostante. Nel caso di sensazione di freddo si ha una riduzione del flusso di sangue verso la superficie corporea in modo da ridurre la dispersione di calore verso l'ambiente e al tempo stesso un aumento del flusso sanguigno verso gli organi interni vitali, in modo da mantenerli alla temperatura ottimale di circa 37°C . Ciò si ottiene mediante una riduzione della sezione e quindi un aumento della resistenza al flusso a livello delle arteriole che alimentano il flusso sanguigno che irrori i capillari della superficie del corpo. E' il **meccanismo di termoregolazione vasomotoria** del corpo umano detto di **vasocostrizione**.

Nel caso invece di tendenza all'aumento della temperatura interna del corpo, percepita sotto forma di sensazione di caldo, si ha il **meccanismo di vasodilatazione**, costituito da un aumento della sezione delle arteriole che alimentano i capillari che irrorano di sangue la superficie corporea, con conseguente aumento della temperatura della pelle e quindi dell'energia termica dissipata verso l'ambiente circostante.

Un secondo esempio di alterazione regionale della resistenza vascolare si ha nel caso di intensa attività fisica, con conseguente aumento sia della pressione arteriosa che della gittata cardiaca, prodotto dalla stimolazione, da parte del sistema nervoso simpatico, dell'attività del cuore. Contemporaneamente le arteriole della circolazione periferica subiscono una contrazione con diminuzione della loro sezione e conseguente aumento della resistenza al flusso. Al contrario quelle che alimentano il sistema che irrori di sangue i muscoli principalmente coinvolti nell'attività fisica vengono dilatate con conseguente riduzione della resistenza idraulica e aumento dell'afflusso di sangue e quindi di ossigeno.

Per una valutazione dell'andamento della velocità di flusso del sangue nei diversi vasi del sistema circolatorio si può utilizzare il principio di conservazione della massa, che per un fluido incompressibile come il sangue, in moto in regime stazionario, è espresso dall'equazione di continuità:

$$\dot{V} = wA = \text{costante} \quad (14.150)$$

dove \dot{V} è la portata volumetrica in $[\text{m}^3 \text{s}^{-1}]$, A è una generica sezione, in $[\text{m}^2]$, del condotto e w è la velocità media di flusso nella sezione A , in $[\text{m s}^{-1}]$.

L'equazione (14.150) mostra che la velocità di flusso è inversamente proporzionale alla sezione del vaso. Ad esempio, l'arteria principale, l'aorta, è una struttura la cui sezione finale è circa un sesto della sezione iniziale, per cui la velocità di flusso varia e a titolo puramente indicativo si può assumere un valore medio di circa 35 cm/s. L'aorta si dirama quindi in altre arterie e poiché le diramazioni sono collegate in parallelo, anche se la sezione delle diramazioni è inferiore, la sezione complessiva dei vasi a valle è maggiore di quella a monte. Quindi nel sistema circolatorio dall'aorta fino ai capillari l'area complessiva dei vasi nei quali ogni tratto si dirama aumenta e, sulla base dell'equazione di continuità, la velocità di flusso diminuisce. Il valore minimo (minore di 0,1 cm/s) si ha proprio a livello dei capillari, il che favorisce i processi di scambio.

Le vene hanno generalmente sezioni più grandi delle rispettive arterie e sono più numerose, per cui la velocità di flusso del sangue venoso è più bassa. Anche nella circolazione polmonare si ha un andamento analogo, con un notevole aumento della sezione complessiva dei capillari, con conseguente forte riduzione della velocità di flusso, il che favorisce i processi di scambio gassoso tra sangue e polmoni.

Esempio 14.12

Un tratto di vaso sanguigno, avente forma cilindrica con sezione $A_1 = A_2 = 2 \text{ cm}^2$, si dirama in quattro vasi più piccoli anch'essi di forma cilindrica aventi tutti sezione uguale $A_3 = 1 \text{ cm}^2$. Ipotizzando che il flusso sia stazionario, considerando che il sangue può essere considerato un fluido incompressibile, determinare:

- la velocità di flusso w_2 nella sezione di uscita del vaso principale, supponendo che la velocità di flusso nella sezione di ingresso sia $w_1 = 1 \text{ cm/s}$;
- la velocità di flusso w_3 in ciascuno dei vasi che da esso si diramano.

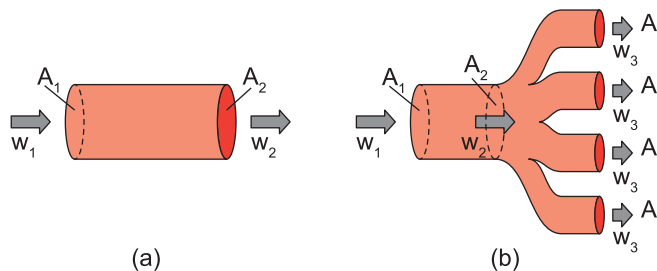


Figura 14.38

Schema del vaso sanguigno cilindrico principale (a) che si dirama in quattro vasi cilindrici più piccoli (b)

Analisi

Il principio di conservazione della massa, considerando che il sangue può essere considerato un fluido incompressibile e ipotizzando che il moto sia in regime stazionario, è esprimibile con l'equazione di continuità (14.150):

$$\dot{V} = wA = \text{costante} \quad (14.150)$$

dalla quale, con riferimento alla Figura 14.38a, si ricava:

$$\dot{V} = w_1 A_1 = w_2 A_2$$

mentre, con riferimento alla Figura 14.38b e considerando che i vasi secondari sono collegati al vaso principale in parallelo per cui la portata volumica si distribuisce su una superficie totale pari a $A_{3,tot} = 4A_3$ si ricava:

$$\dot{V} = w_1 A_1 = w_3 A_{3,tot} = w_3 4A_3$$

Soluzione

Dalle relazioni precedenti si ricavano in modo banale le velocità w_2 e w_3 in funzione della velocità di flusso $w_1 = 1 \text{ cm/s}$:

$$w_2 = w_1 \frac{A_1}{A_2} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{2\text{cm}^2}{2\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$w_3 = w_1 \frac{A_1}{A_{3,tot}} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{2\text{cm}^2}{4 \cdot 1\text{cm}^2} = 0,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Discussione

I risultati ottenuti mostrano, pur nella semplicità del problema affrontato, che la velocità di flusso nel sistema circolatorio varia in modo sensibile man mano che il sangue si distribuisce nei vasi che si diramano allontanandosi dal cuore per poi riconfluire nelle vene che lo riportano al cuore. Ad esempio, a puro titolo indicativo, si può assumere che nell'aorta il cui diametro interno medio è di circa 30 mm la velocità sia di circa $50 \div 40 \text{ cm/s}$. Nei capillari che hanno un diametro interno medio di pochi micrometri, ma una sezione totale media orientativamente di circa $4000 \div 5000 \text{ cm}^2$, data dalla somma della sezione di ciascun vaso che costituisce il fascio capillare per il numero di capillari che si diramano dall'arteriola, la velocità media diventa molto più piccola.

14.8.3.2 APPLICAZIONE DELLA LEGGE DI BERNOULLI ALLA CIRCOLAZIONE SANGUIGNA

La legge di Bernoulli, introdotta nel paragrafo 14.2.3.5, a cui si rimanda per i dettagli, è espressa dall'equazione (14.25)

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho w^2 = \text{costante}$$

ed è basata sull'ipotesi di flusso stazionario di un fluido incompressibile e inviscido.

Essa, quindi, può essere applicata per studiare particolari situazioni, come alcune condizioni patologiche che possono verificarsi nel sistema circolatorio, nel caso in cui il tratto di vaso sanguigno esaminato sia sufficientemente breve da poter trascurare gli effetti della viscosità del sangue. Se inoltre si ipotizza che la variazione di quota tra la sezione di uscita del tratto di vaso considerato e la sezione di ingresso sia nulla o trascurabile, l'equazione di Bernoulli si riduce a

$$p + \frac{1}{2}\rho w^2 = \text{costante} \quad (14.151)$$

che mostra che, se aumenta la velocità di flusso w , la pressione p diminuisce e viceversa.

La legge di Bernoulli, nella forma dell'equazione (14.151), in connessione con il principio di conservazione della massa espressa mediante l'equazione di continuità (14.150)

$$\dot{V} = wA = \text{costante}$$

può essere utilizzata per valutare gli effetti di due importanti patologie vascolari, quali la stenosi e l'aneurisma, che si possono avere in un tratto di un vaso sanguigno.

La **stenosi** è una patologia vascolare che si ha quando un segmento di un vaso sanguigno si restringe localmente a causa, ad esempio, di malformazioni congenite o di aterosclerosi con accumulo locale di materiale biologico.

L'**aneurisma** è una dilatazione di un tratto di vaso vascolare, spesso dovuto ad aterosclerosi che provoca un indebolimento della parete del vaso.

Negli esempi seguenti vengono trattate, in forma inevitabilmente approssimata, le principali conseguenze di tipo fluidodinamico conseguenti alle suddette patologie che possono colpire i vasi sanguigni.

Esempio 14.13: Stenosi di un vaso sanguigno

In Figura 14.39 è illustrato, in modo molto schematico, un tratto di vaso sanguigno in cui è presente una stenosi. In questo caso, la sezione del vaso sanguigno subisce una brusca variazione dal valore normale A_1 al valore A_2 in corrispondenza della stenosi, con $A_2 < A_1$.

Determinare gli effetti della stenosi del vaso sanguigno sulla velocità di flusso e sulla pressione del sangue, supponendo che siano note la sezione A_1 la velocità di flusso w_1 e la pressione p_1 nel vaso in condizioni normali e la sezione A_2 , in corrispondenza della stenosi.

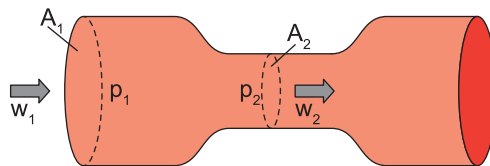


Figura 14.39
Rappresentazione schematica di stenosi di un tratto di vaso sanguigno

Analisi

La velocità di flusso w_2 nel tratto stenotico può essere calcolata utilizzando l'equazione (14.150) che applicata al tratto di vaso compreso tra la sezione di ingresso A_1 e A_2 fornisce:

$$w_1 A_1 = w_2 A_2 \quad (14.152)$$

Una volta nota w_2 , la pressione P_2 si può calcolare applicando la legge di Bernoulli (14.151), che applicata al tratto di vaso compreso tra A_1 e A_2 fornisce:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho w_2^2 \quad (14.153)$$

Soluzione

Dalla relazione (14.152) si ricava la velocità w_2 in funzione della velocità w_1 :

$$w_2 = w_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Poiché A_2 è minore di A_1 , si ha $w_2 > w_1$, ovvero la velocità di flusso aumenta nel tratto di vaso stenotico.

Dalla relazione (14.153) si ricava

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 - \frac{1}{2} \rho w_2^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 - \frac{1}{2} \rho w_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

da cui

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$$

ed essendo $(A_1/A_2) > 1$ si ha $p_2 < p_1$, ovvero la pressione in corrispondenza della stenosi è minore di quella che si ha nel vaso sanguigno in condizioni normali.

Discussione

Nonostante le semplificazioni sia di tipo geometrico che fluidodinamiche del modello utilizzato, i risultati ottenuti mostrano che nel tratto di vaso stenotico la velocità di flusso aumenta e, conseguentemente, la pressione diminuisce, per cui si crea una differenza di pressione tra parete esterna e interna del vaso, che, in condizioni severe, può portare a un ulteriore restringimento della stenosi fino alla completa occlusione.

Esempio 14.14: Aneurisma di un vaso sanguigno

In Figura 14.40 è illustrato, in modo molto schematico, un tratto di vaso sanguigno in cui è presente un aneurisma. In questo caso, la sezione del vaso sanguigno subisce una brusca variazione dal valore normale A_1 al valore A_2 in corrispondenza della stenosi, con $A_2 > A_1$.

Determinare gli effetti dell'anomalo aumento della sezione del vaso sanguigno sulla velocità di flusso e sulla pressione del sangue, supponendo che siano note la sezione A_1 , la velocità di flusso w_1 e la pressione p_1 nel vaso in condizioni normali e la sezione A_2 in corrispondenza dell'aneurisma.

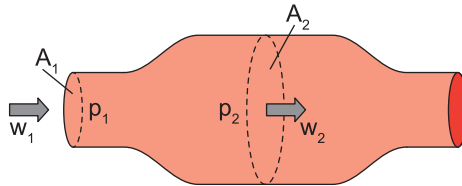


Figura 14.40
Rappresentazione schematica di aneurisma di un tratto di vaso sanguigno

Analisi

In modo analogo al caso precedente, la velocità di flusso w_2 nel tratto interessato dall'aneurisma può essere calcolata utilizzando l'equazione (14.150) che applicata al tratto di vaso compreso tra la sezione di ingresso A_1 e A_2 fornisce:

$$w_1 A_1 = w_2 A_2 \quad (14.152)$$

Una volta nota w_2 , la pressione P_2 si può calcolare applicando la legge di Bernoulli (14.151), che applicata al tratto di vaso compreso tra A_1 e A_2 fornisce:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho w_2^2 \quad (14.153)$$

Soluzione

Dalla relazione (14.152) si ricava la velocità w_2 in funzione della velocità w_1 :

$$w_2 = w_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Poiché A_2 è maggiore di A_1 , si ha $w_2 < w_1$, ovvero la velocità di flusso diminuisce nel tratto di vaso in cui si ha l'anomalo aumento della sezione.

Dalla relazione (14.153) si ricava

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 - \frac{1}{2} \rho w_2^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 - \frac{1}{2} \rho w_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

da cui

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$$

ed essendo $(A_1/A_2) < 1$ si ha $p_2 > p_1$, ovvero la pressione in corrispondenza dell'aneurisma è maggiore di quella che si ha nel vaso sanguigno in condizioni normali.

Discussione

Nonostante le semplificazioni sia di tipo geometrico che fluidodinamiche del modello utilizzato, i risultati ottenuti mostrano che nel tratto di vaso in cui è presente l'aneurisma la velocità di flusso diminuisce e, conseguentemente, la pressione aumenta, per cui si crea una differenza di pressione positiva tra parete interna e esterna del vaso con un incremento della tensione, che, in condizioni severe, può portare irreversibilmente a un ulteriore allargamento del vaso fino alla sua rottura. Con conseguenze che possono essere letali.

14.8.3.3 EFFETTI IDROSTATICI NEL SISTEMA SANGUIGNO

Nelle trattazioni precedenti gli effetti della gravità sulla circolazione del sangue non sono stati presi in considerazione. Essi sono realmente trascurabili nel caso di un individuo in posizione supina mentre possono diventare importanti nel caso di un individuo in posizione eretta.

Per valutare tali effetti si può fare riferimento alla legge di Stevino dell'idrostatica:

$$\Delta p = \rho g \Delta z \quad (14.154)$$

dove (ρ) è la densità del fluido, (g) l'accelerazione di gravità locale, (Δz) l'altezza della colonna di liquido e (Δp) la differenza di pressione tra la superficie inferiore e quella superiore della colonna di liquido considerata. Pertanto, considerando il sangue come un liquido omogeneo, ovvero con densità costante, la differenza di pressione (Δp) è direttamente proporzionale all'altezza (Δz) della colonna di liquido.

Ciò spiega, in modo ovvio, perché per un individuo in posizione supina sia la pressione arteriosa che la pressione venosa nei vasi sanguigni della testa e dei piedi varino poco rispetto ai rispettivi valori a livello del cuore. Tanto per fissare le idee, assumendo che per un tipico individuo adulto la pressione arteriosa a livello del cuore sia circa 100 mmHg, quella a livello dei piedi e della testa in posizione supina è circa 95 mmHg. Ovviamente la pressione venosa a livello del cuore, per effetto delle perdite viscosive, è drasticamente più bassa (circa 2 mmHg) così come quelle a livello dei piedi e della testa, che però, sempre in posizione supina, sono praticamente uguali e pari a circa 5 mmHg. Ovviamente, la distribuzione della pressione sanguigna cambia radicalmente con l'individuo in posizione eretta per effetto della forza di gravità. In particolare, sia la pressione arteriosa che quella venosa aumentano drasticamente a livello delle estremità inferiori rispetto ai valori a livello della testa. Ciò può dar luogo all'espansione soprattutto delle vene delle estremità inferiori, con un aumento dell'accumulo di sangue al loro interno e, conseguentemente, una riduzione del flusso di ritorno al cuore e quindi al cervello. In casi critici, in cui il tono venoso sia particolarmente basso e la persona si alzi improvvisamente dalla posizione supina, si può verificare una perdita di equilibrio o addirittura uno svenimento. In questi casi, la cosa migliore da fare è rimettere il soggetto in posizione supina e, possibilmente, sollevare le gambe e flettere i muscoli dei polpacci per favorire il ritorno venoso al cuore e al cervello.

14.8.4 LIMITI DEL MODELLO DI HAGEN-POISEUILLE

La legge di Hagen-Poiseuille può essere ricavata utilizzando un modello del sistema circolatorio basato su diverse ipotesi semplificative, che di seguito vengono riesaminate in modo critico, così da poter valutare i limiti di applicabilità del modello stesso.

1. Ipotesi di comportamento del sangue come fluido newtoniano

Il modello di Hagen-Poiseuille assume che il sangue si comporti come un fluido newtoniano con coefficiente di viscosità costante. In realtà si è dimostrato sperimentalmente che tale assunzione può essere ritenuta valida con buona approssimazione nelle grandi arterie in cui il gradiente di velocità è alto.

Nella microcircolazione (piccole arterie e capillari) il sangue deve essere trattato come un fluido non-newtoniano e il modello che meglio descrive il suo comportamento reologico è il modello di Casson, basato sull'esistenza di una tensione di snervamento e di una relazione non lineare tra sforzo viscoso e gradiente di velocità (vedi paragrafo 14.2.3.3).

2. Ipotesi di flusso stazionario

L'ipotesi di flusso stazionario semplifica notevolmente la trattazione matematica del modello, ma è evidentemente non rispondente alla situazione reale che nelle arterie è pulsatile, per effetto delle fasi di sistole e di diastole del ciclo cardiaco. Nelle grosse vene il flusso può essere considerato praticamente non pulsatile, ma nella vena cava, in prossimità dell'atrio destro, si ha di nuovo pulsilità del flusso e della pressione.

Pertanto, l'ipotesi di flusso stazionario non è valida nella maggior parte del sistema circolatorio umano.

3. Ipotesi di flusso laminare pienamente sviluppato

Nel paragrafo 14.5 si è visto che per il flusso di un fluido incomprimibile in un tubo cilindrico a pareti rigide in regime stazionario si può definire un numero di Reynolds

$$Re_D = \frac{\rho \bar{w} D}{\mu} = \frac{4\dot{m}}{\mu \pi D}$$

dove, (ρ) e (μ) sono, rispettivamente, la densità e la viscosità del fluido, (\bar{w}) e (\dot{m}) sono la velocità media e la portata massica del fluido, nella sezione considerata, e (D) è il diametro del cilindro. Il numero di Reynolds al solito consente di valutare la regione in cui si ha la transizione del flusso da laminare a turbolento e la lunghezza della regione di ingresso idrodinamico, oltre la quale il flusso diventa pienamente sviluppato.

Per un tubo cilindrico con parete rigida si ha che:

- il flusso è laminare per $Re_D < 2300$;
- si ha regime di transizione per $2300 < Re_D < 4000$;
- il flusso è turbolento per $Re_D > 4000$

Inoltre, il flusso risulta pienamente sviluppato a una distanza dall'ingresso data da:

- nel caso di regime laminare: $x_{ingr,lam} \approx 0,05 D Re_d$
- nel caso di regime turbolento: $x_{ingr,lam} \approx 10 D$

A puro titolo di esempio, assumendo per l'arteria umana i seguenti valori medi: diametro $D \approx 2,5$ cm, portata volumica $\dot{V} \approx 0,1 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$, densità del sangue $\rho \approx 1060 \frac{kg}{m^3}$, viscosità dinamica del sangue $\mu \approx 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$ si ottengono i seguenti risultati:

- $Re_d \approx 1540 < 2300 \rightarrow$ il flusso è laminare;
- $x_{ingr,lam} \approx 2$ m \rightarrow dato che l'aorta di un umano adulto è lunga meno di 1 metro, il flusso non è mai pienamente sviluppato.

Come secondo esempio si può considerare il caso di numerose arterie che si diramano dall'aorta (quindi di dimensioni molto minori) per le quali possiamo assumere i seguenti valori tipici: diametro $D \approx 2,0$ mm, velocità media $\bar{w} \approx 10 \frac{cm}{s}$, densità del sangue $\rho \approx 1060 \frac{kg}{m^3}$, viscosità dinamica del sangue $\mu \approx 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$, si ottengono i seguenti risultati:

- $Re_d \approx 60 < 2300 \rightarrow$ il flusso è laminare;
- $x_{ingr,lam} \approx 6$ mm \rightarrow per cui in arterie di questo tipo (lunghe diversi centimetri) il flusso è pienamente sviluppato.

Pertanto, si desume che nella maggior parte delle arterie il flusso può essere descritto con buona approssimazione con il modello di Hagen-Poiseuille.

Gli esempi sopra riportati indicano che il sangue fluisce nel sistema circolatorio con moto laminare. In condizioni normali si ha turbolenza nelle valvole cardiache o in caso di intenso sforzo fisico, il che provoca un aumento della gittata cardiaca e quindi della velocità di flusso con conseguente aumento del numero di Reynolds. Invece in condizioni patologiche il moto turbolento può svilupparsi in un vaso con una stenosi, in cui il restringimento della sezione provoca un aumento della velocità di flusso. In ogni caso, la turbolenza dà luogo alla generazione di rumori aero-acustici, che possono essere rilevati e utilizzati a fini diagnostici.

Il passaggio da moto laminare a turbolento con conseguente generazione di rumori è anche alla base del funzionamento dell'apparato di misura della pressione arteriosa detto **sfigmomanometro**, costituito da un manicotto che viene avvolto attorno a un braccio del paziente, da una pompetta munita di valvola con cui si può immettere manualmente aria nel manicotto e scaricarla mediante la valvola, da un manometro per la misura della pressione e da un fonendoscopio con cui si può auscultare i rumori prodotti dalla turbolenza nel vaso arterioso del braccio in cui si vuole effettuare la misura. Pompando aria nel manicotto si aumenta la pressione esterna esercitata sul braccio fino a provocare una diminuzione della sezione dell'arteria brachiale con conseguente aumento della velocità del sangue fino a provocare la transizione alla turbolenza, con formazione dei tipici rumori rilevati dal fonendoscopio. Aumentando ulteriormente la pressione esercitata dal manicotto si occlude completamente l'arteria provocando l'interruzione della circolazione e, quindi, la scomparsa del rumore turbolento. Aprendo la valvola si inizia a scaricare aria dal manicotto e quindi a ridurre la pressione. In corrispondenza della ripresa del rumore da flusso turbolento si può leggere sul manometro il valore corrispondente alla pressione arteriosa sistolica, detta massima, e quando il rumore

scompare per il passaggio da flusso turbolento a laminare, la pressione letta sul manometro viene assunta come pressione arteriosa diastolica, detta minima.

La misura della pressione arteriosa sopra descritta costituisce un metodo semplice e non invasivo, utilizzabile ampiamente anche in ambito domestico.

In ambito clinico una misura della pressione sanguigna più precisa e mirata viene effettuata inserendo direttamente in un vaso un catetere collegato con un trasduttore di pressione. In questo caso la misura utilizza la legge di Bernoulli, di cui al paragrafo 14.8.3.2

4. Ipotesi di forma cilindrica e di parete rigida dei vasi sanguigni

La trattazione di Hagen-Poiseuille modella i vasi sanguigni come tubi cilindrici, ovvero con sezione uniforme circolare e pareti rigide. In realtà questa è un'approssimazione accettabile per la maggior parte delle arterie nell'apparato circolatorio sistemico, mentre le arterie dell'apparato circolatorio polmonare e le vene non hanno sezione cilindrica ma approssimativamente ellittica. Va inoltre considerato che i vasi sanguigni hanno sezioni non costanti ma che tendono a restringersi nel verso del flusso. Ma l'approssimazione più stringente che non è verificata nella situazione reale è quella di vasi sanguigni come tubi rigidi. Infatti, le pareti delle arterie sono elastiche e tendono a distendersi per effetto della pressione esercitata dal sangue e ciò, ovviamente, influisce in modo non trascurabile sulla dinamica del flusso sanguigno.

14.8.5 CONCLUSIONI

La discussione precedente mostra che le ipotesi di sangue come fluido newtoniano, di flusso stazionario e pienamente sviluppato e di pareti cilindriche rigide, poste alla base del modello di Hagen-Poiseuille, spesso non descrivono in modo soddisfacente la situazione reale che si ha nell'apparato circolatorio umano.

Ciò è particolarmente vero nel caso della microcircolazione, ovvero del **flusso nella rete capillare**, in cui le condizioni fluidodinamiche differiscono in modo sostanziale da quelle considerate nella trattazione precedente per cause diverse, quali ad esempio:

- i vasi che costituiscono la fitta ramificazione di capillari che si estendono tra le arteriole e le venule hanno dimensioni microscopiche confrontabili con le dimensioni dei globuli rossi;
- la pressione nei capillari dipende dal sistema di autoregolazione presente nelle arteriole e nelle venule e non risente di quella sistemica;
- il sangue nei capillari scorre a velocità estremamente ridotta, il che favorisce i processi di scambio, i quali a loro volta fanno sì che il sistema sia aperto con scambio di massa;
- nonostante la piccolissima sezione dei capillari, la resistenza idrodinamica è bassa perché nella regione nelle immediate vicinanze con la parete si forma uno strato limite costituito da solo plasma, il che riduce la viscosità rispetto a quella del sangue intero.

Nonostante tutto ciò, il modello di Hagen-Poiseuille può fornire interessanti e valide informazioni, soprattutto a livello qualitativo, sulle caratteristiche del flusso sanguigno nel sistema arterioso. Ovviamente sono possibili trattazioni più rigorose e più rispondenti alla situazione reale del sistema circolatorio utilizzando modelli

che considerano i vasi sanguigni estendibili e di forma non cilindrica, il flusso non stazionario ma pulsatile e la situazione idrodinamica non pienamente sviluppata, così come esistono modelli specifici per la trattazione fluidodinamica nella rete capillare. Tali modelli utilizzano risultati sperimentali molto avanzati e metodi di calcolo basati sulla fluidodinamica computazionale (CFD), che, ovviamente, vanno oltre gli scopi di questi cenni introduttivi alle caratteristiche di base dell'emodinamica.