

Indice

Prefazione	xi
1 Numeri reali	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Rappresentazione decimale dei numeri razionali	1
1.3 Numeri reali e ordinamento	3
1.4 Partizioni di \mathbb{Q} e di \mathbb{R}	10
1.5 Operazioni tra numeri reali	11
1.6 Una diseguaglianza fondamentale	14
1.7 Radici, potenze, logaritmi	14
1.8 Spazi euclidei	16
1.9 Appendice	21
1.9.1 Proprietà degli estremi superiore e inferiore	21
1.9.2 Proprietà delle operazioni in \mathbb{R}	21
1.9.3 Radici e potenze	26
1.9.4 Logaritmi	28
2 Funzioni	31
2.1 Introduzione	31
2.2 Immagini e controimmagini	31
2.3 Restrizione, funzione inversa, composta.	34
2.4 Successioni. Indici	37
2.5 Potenza di un insieme	39
2.6 Potenza del numerabile	40
2.7 Potenza del continuo	42
2.8 Appendice	44
2.8.1 Le funzioni come sottoinsiemi del prodotto cartesiano	44
2.8.2 Proprietà degli insiemi infiniti	44
2.8.3 Potenza dell'insieme delle parti	46
3 Spazi Metrici	49
3.1 Introduzione	49
3.2 Definizione ed esempi	49
3.3 Intorni	53

3.4	Classificazione dei punti	56
3.5	Insiemi aperti, chiusi, limitati	60
3.6	Compattezza	66
3.7	Il Teorema di Heine–Borel	71
3.8	Connessione	71
3.9	\mathbb{R} come spazio metrico	73
3.10	Appendice	75
3.10.1	Compattezza in \mathbb{R}^n	75
3.10.2	Norme e distanze	78
3.10.3	Proprietà dello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d^*)$	79
4	Successioni	81
4.1	Introduzione	81
4.2	Successioni convergenti	82
4.3	Sottosuccessioni e punti di accumulazione	85
4.4	Successioni a valori reali	87
4.5	Permanenza del segno. Confronto	89
4.6	Successioni monotone	92
4.7	Calcolo dei limiti	93
4.7.1	Calcolo dei limiti in \mathbb{R}	94
4.7.2	Calcolo dei limiti in $\overline{\mathbb{R}}$	94
4.8	Il numero e	100
4.9	Infiniti e infinitesimi	105
4.10	o piccolo e asintotico	109
4.11	Successioni in \mathbb{R}^k	111
4.12	Classe limite	113
4.13	La condizione di Cauchy	116
4.14	Appendice	118
4.14.1	Dimostrazione del Teorema 4.7.2	118
4.14.2	Dimostrazione dei Teoremi 4.7.4 e 4.7.6	120
4.14.3	Dimostrazione del Teorema 4.7.8	120
4.14.4	Dimostrazione dei Teoremi 4.7.9, 4.7.10, 4.7.12, 4.7.13	120
5	Serie	123
5.1	Introduzione	123
5.2	Definizioni ed esempi	123
5.3	La condizione di Cauchy per le serie	126
5.4	Serie a termini non negativi	129
5.5	Criteri della radice e del rapporto	131
5.6	Criterio di condensazione	133
5.7	Criterio di Leibniz	136
5.8	Convergenza incondizionata	138
5.9	Appendice	139
5.9.1	Somma di serie	139
5.9.2	Prodotto di serie	140
5.9.3	Proprietà associativa per le serie	142

5.9.4	Permutazione dei termini di una serie	143
5.9.5	Rappresentazione dei numeri reali come serie	145
6	Limiti di funzioni	147
6.1	Introduzione	147
6.2	Limiti in spazi metrici	148
6.3	Limiti infiniti e limiti all'infinito	152
6.4	Limiti di funzioni reali di variabile reale	158
6.5	Segno, confronto.	162
6.6	Limiti di successioni e limiti di funzioni	165
6.7	Calcolo dei limiti	167
6.8	Infiniti, infinitesimi, o piccolo, asintotico	169
6.9	Appendice	173
6.9.1	Classe limite di una funzione	173
7	Continuità	177
7.1	Introduzione	177
7.2	Continuità in spazi metrici	177
7.3	Continuità globale	179
7.4	Continuità delle funzioni a valori reali	180
7.5	Il Teorema di Weierstrass	185
7.6	Il Teorema di Darboux	186
7.7	Uniforme continuità	188
7.8	Punti di discontinuità	190
7.8.1	Discontinuità di prima specie	190
7.8.2	Discontinuità di seconda specie	191
7.8.3	Discontinuità eliminabili	192
7.9	Funzioni monotone	194
7.10	Continuità della funzione inversa	198
7.11	Appendice	199
7.11.1	Continuità della funzione inversa in spazi metrici	199
7.11.2	Uniforme continuità. Funzioni lipschitziane e hölderiane.	200
8	Calcolo differenziale	203
8.1	Introduzione	203
8.2	Derivata e differenziale	204
8.3	Tangente verticale, punti angolosi, cuspidi	207
8.4	Regole di derivazione	210
8.5	Derivate delle funzioni elementari	213
8.5.1	Potenze e radici	213
8.5.2	Esponenziali e funzioni iperboliche	215
8.5.3	Logaritmi	216
8.5.4	Funzioni trigonometriche	216
8.5.5	Inverse delle funzioni trigonometriche	217
8.5.6	Derivate di funzioni composte	218
8.6	Massimi e minimi relativi	220

8.7	Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange	224
8.8	Crescere e decrescere	228
8.9	Teorema di De l'Hospital	231
8.10	Derivate di ordine superiore	233
8.11	Formula di Taylor	236
8.12	Esempi sulla formula di Taylor	240
8.13	Convessità, concavità, flessi.	244
8.14	Asintoti obliqui	251
8.15	Appendice	253
8.15.1	Dimostrazione del Teorema di De l'Hospital	253
8.15.2	Convessità	255
8.15.3	Estremanti e punti di flesso	257
8.15.4	Serie di Taylor	258
9	Primitive	261
9.1	Introduzione	261
9.2	Regole di integrazione indefinita	262
9.3	Primitive delle funzioni razionali fratte	268
9.3.1	Caso in cui il grado del denominatore è 1 o 2	268
9.3.2	Casi fondamentali	271
9.3.3	Caso generale	272
9.4	Primitive di funzioni razionali fratte in un argomento	274
9.5	Primitive di funzioni razionali fratte in più argomenti	275
9.5.1	Primitive di $R(\cos t, \sin t)$	276
9.5.2	Primitive di $R(\cos^2 t, \sin^2 t, \tan t)$	276
9.5.3	Primitive di $R(x, \sqrt[q_1]{x^{p_1}}, \dots, \sqrt[q_n]{x^{p_n}})$	277
9.5.4	Primitive di $R\left(x, \sqrt[q_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}}, \dots, \sqrt[q_n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}}\right)$	277
9.5.5	Primitive di $R(x, \sqrt{\pm x^2 + px + q})$	279
9.6	Integrali binomi	282
9.7	Appendice	283
9.7.1	Decomposizione di una funzione razionale fratta	283
10	Integrale di Riemann	287
10.1	Introduzione	287
10.2	Somme superiori e inferiori	287
10.3	L'integrale di Riemann	290
10.4	Proprietà dell'integrale	292
10.5	Classi di funzioni integrabili	297
10.6	Integrale esteso a un intervallo orientato	300
10.7	Il Teorema fondamentale del calcolo integrale	302
10.8	Integrali impropri	306
10.8.1	Integrali impropri di prima specie	306
10.8.2	Integrali impropri di seconda specie	309
10.8.3	Criteri del confronto	310
10.8.4	Integrali impropri di terza specie	313

10.9	Appendice	317
10.9.1	Estensione del Teorema fondamentale del calcolo integrale	317
10.9.2	Formula di Taylor con resto integrale	318
10.9.3	Confronto e esistenza degli integrali impropri	319
10.9.4	Formula di Wallis	321
10.9.5	Somme e integrali. Formula di Eulero	323
10.9.6	Formula di Stirling	324
11	Numeri complessi	327
11.1	Introduzione	327
11.2	Il campo complesso	327
11.3	Il sottocampo dei numeri reali	329
11.4	Forma algebrica dei numeri complessi	330
11.5	Forma trigonometrica dei numeri complessi	333
11.6	Radici nel campo complesso	337