1) Si scriva la tavola di verità della funzione $f(x,y,z) = x + \bar{y}z$.

Per compilare una tavola di verità corretta, è sufficiente ricordare le regole di base dell'algebra di Boole (0 AND 0 = 0; 0 AND 1 = 0; 1 AND 1 = 1; 0 OR 0 = 0; 0 OR 1 = 1; 1 OR 1 = 1).

x y z	*x*	$\bar{y}z$	*f(x,y,z)*
0 0 0	0	0	0
0 0 1	0	1	1
0 1 0	0	0	0
0 1 1	0	0	0
1 0 0	1	0	1
1 0 1	1	1	1
1 1 0	1	0	1
1 1 1	1	0	1

2) Si scriva la tavola di verità della funzione $f(a,b,c) = b$.

Il valore assunto dalla funzione, come si può osservare, è uguale al valore assunto dalla variabile indipendente b per qualsiasi valore assunto dalle variabili a e c, ovvero:

$$f(a,b,c) = b = b \cdot 1 = b(a + \bar{a}) = ab + \bar{a}b = ab(c + \bar{c}) + \bar{a}b(c + \bar{c}) = abc + ab\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c}$$

a b c	*f(a,b,c)*
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

3) Data la tavola di verità di cui al punto 2), scrivere la funzione *f(a,b,c)* nella forma somma di prodotti, successivamente minimizzarla utilizzando i teoremi dell'algebra di Boole.

La forma somma di prodotti si ricava considerando le combinazioni di variabili per le quali la funzione vale 1; in seguito, l'espressione è ricavata scrivendo i prodotti logici negando la variabili indipendenti se pari a 0 e lasciandole invariate se pari a 1 e, successivamente, sommando i vari prodotti. Infine, la funzione è minimizzata attraverso i teoremi dell'algebra di Boole ($a + \bar{a} = 1; a + a = a$).

Quindi, la funzione è minimizzata nel modo sotto indicato.

$$f(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + ab\bar{c} + abc = \bar{a}b(\bar{c} + c) + b\bar{c}(\bar{a} + a) + bc(\bar{a} + a) + ab(\bar{c} + c) =$$

$$= \bar{a}b + b\bar{c} + bc + ab = b(\bar{a} + a) + b(\bar{c} + c) = b + b = b$$

Attraverso la minimizzazione, si è così tornati all'espressione di partenza.

4) Verificare se, nell'algebra di Boole, vale o no la relazione $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$.

Il primo membro dell'espressione può essere sviluppato attraverso il teorema di de Morgan. Esso afferma che, per calcolare l'espressione complementare (cioè la negazione di un'espressione), è possibile calcolare l'espressione duale e in seguito negare le variabili indipendenti.
Il primo membro è quindi sviluppato come $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$ dalla quale si deduce che la relazione presentata non verificata, essendo $\bar{x} + \bar{y} \neq \bar{x}\bar{y}$.

Altro metodo. Si effettua la verifica mediante la tavola di verità:

x	y	$\overline{xy}$	$\bar{x}\bar{y}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

5) Applicando i teoremi dell'algebra booleana, semplificare le seguenti espressioni logiche:
   a) $ab + ac + bd + cd$
   b) $\overline{ab + bc + \bar{a}c}$
   c) $x\bar{y}(\bar{x}\bar{y} + \bar{y}(\bar{x}y + z) + \bar{x}y + yz)$

   a) Per la semplificazione dell'espressione logica si applica la proprietà distributiva:
   $ab + ac + bd + cd = a(b + c) + d(b + c) = (a + d)(b + c)$

   b) Per la semplificazione, è utile applicare il teorema di de Morgan, raccogliere alcuni termini e applicare i teoremi precedentemente indicati.
   $\overline{ab + bc + \bar{a}c} = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{c})(a + \bar{c}) = (\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{b} + \bar{b}\bar{c})(a + \bar{c}) =$
   $= a\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}\bar{c} + a\bar{b}\bar{b} + \bar{b}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c} + a\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} =$
   $= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + (a + 1)\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} + 1)\bar{b}\bar{c} + a\bar{b} + \bar{a}\bar{c} = a\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$

   c) Per la semplificazione, si risolvono le parentesi , successivamente, si applicano i teoremi dell'algebra di Boole.
   $x\bar{y}(\bar{x}\bar{y} + \bar{y}(\bar{x}y + z) + \bar{x}y + yz) = x\bar{y}(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y\bar{y} + \bar{y}z + \bar{x}y + yz) = x\bar{y}(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y + \bar{y}z + yz) =$
   $= x\bar{y}(\bar{x}(\bar{y} + y) + z(\bar{x} + x)) = x\bar{y}(\bar{x} + z) = x\bar{x}\bar{y} + x\bar{y}z = x\bar{y}z$

6) Applicando i teoremi dell'algebra di Boole, verificare se le due seguenti espressioni logiche sono o non sono equivalenti, poi effettuare la controprova mediante la tavola di verità:

a) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} + b\bar{c} + (a(b + \bar{b}\bar{c}))$

b) $a + \bar{c}$

L'espressione a) può essere semplificata risolvendo le parentesi, raccogliendo alcuni termini e applicando poi i teoremi.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} + b\bar{c} + (a(b + \bar{b}\bar{c})) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + b\bar{c} + ab + a\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}(\bar{a} + a) + b\bar{c} + ab = \bar{c}(\bar{b} + b) + ab = ab + \bar{c}$$

Le due espressioni logiche non sono equivalenti avendo $a\bar{c} + \bar{b} \neq a + \bar{c}$.

La verifica è effettuata compilando le due tavole di verità e confrontando i valori assunti dalle due variabili dipendenti ($f_1(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + b\bar{c} + (a(b + \bar{b}\bar{c}))$; $f_2(a,b,c) = a + \bar{c}$).

a	b	c	$f_1(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

a	b	c	$f_2(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

7) Utilizzando i teoremi dell'algebra booleana, si dimostri che "se a implica b e b implica c allora a implica c". In altre parole, occorre dimostrare che l'espressione

$$((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$$

è una *tautologia*, ovvero che ha sempre valore vero. Si ricorda ce l'implicazione logica è definita come $a \to b \equiv \overline{a} + b$ e che il simbolo $\wedge$ rappresenta il prodotto logico.

L'espressione può essere riscritta secondo i criteri dell'algebra di Boole; in seguito, essa può essere minimizzata raccogliendo alcuni termini e applicando i teoremi: ($a + \overline{a}b = a + b$; $a + \overline{a} = 1$).

$$\overline{(\overline{a} + b)(\overline{b} + c)} + (\overline{a} + c) = \overline{\overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}c + bc} + (\overline{a} + c) = (a + b)(a + \overline{c})(\overline{b} + \overline{c}) + (\overline{a} + c) =$$

$$= a\overline{b} + a\overline{b}\,\overline{c} + a\overline{c} + a\overline{c} + ab\overline{c} + b\overline{c} + \overline{a} + c = a\overline{b} + b\overline{c} + a\overline{c} + \overline{a} + c = a\overline{b} + b\overline{c} + a\overline{c} + \overline{a} + c =$$

$$= a\overline{b} + b\overline{c} + a + c + \overline{a} = a\overline{b} + b\overline{c} + c + 1 = 1$$

Anche, usando la tavola di verità e ponendo:

$a \to b \equiv \overline{a} + b$ = A

$b \to c$ = B

A $\wedge$ B = C

$a \to c$ = D

a	b	c	A	B	C	D	C $\to$ D
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

8) Una commissione costituita da un presidente e da tre membri assume le sue decisioni a maggioranza. Per assicurare che su ogni decisione si possa costituire una maggioranza, il voto del presidente vale il doppio di quello degli altri commissari. Realizzare la funzione che stabilisce se una proposta passa o non passa e successivamente minimizzarla mediante l'uso dei teoremi dell'algebra di Boole.

Dall'enunciato si deduce che la proposta passa se votano favorevolmente i tre commissari oppure il presidente ed almeno uno dei commissari.
Indicando con P il voto del presidente, con A, B, C il voto dei tre commissari, con V l'esito della valutazione e considerando che 1 significhi voto favorevole (per P, A, B, C) o proposta passata (per V), la tavola di verità è quella sotto riportata.

P	A	B	C	V
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Dalla tavola di verità, si ricava, secondo il metodo indicato precedentemente, la funzione V; essa viene in seguito minimizzata attraverso raccoglimenti e teoremi.

$$V = \overline{P}ABC + P\overline{A}\overline{B}C + P\overline{A}BC + PA\overline{B}\overline{C} + PA\overline{B}C + PAB\overline{C} + PABC =$$

$$= ABC + P\overline{A}C + P\overline{B}C + P\overline{A}B + PB\overline{C} + PBC + PA\overline{B} + PA\overline{C} + PAC + PAB =$$

$$= ABC + PC + PC + PB + PB + PBC + PA + PA = ABC + PA + PB + PC$$

9) La sottrazione si esegue per colonne, considerando 3 bit di ugual peso; un bit del minuendo, un bit del sottraendo e un bit di prestito generato dalle colonne precedenti. Realizzare, in analogia al full adder, un blocco logico a 3 ingressi (x_i, y_i, b_i) e 2 uscite (z_i, b_{i+1}), che possa essere usato per realizzare la sottrazione tra due numeri binari x e y, ciascuno rappresentato su k bit, ove si supponga b_o=0.

La tavola di verità è ricavabile applicando le regole della sottrazione in binario.
Dalla tavola di verità, si ricavano poi le funzioni z_i e bi_{+1}, le quali indicano rispettivamente il risultato della sottrazione e il riporto che deve ricircolare nei sottrattori successivi.

x_i	y_i	b_i	z_i	b_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Per il risultato z_i, si ha l'espressione sotto riportata.

$$z_i = \overline{x_i}\,\overline{y_i}b_i + \overline{x_i}y_i\overline{b_i} + x_i\overline{y_i}\,\overline{b_i} + x_iy_ib_i = b_i(\overline{x_i \oplus y_i}) + \overline{b_i}(x_i \oplus y_i)$$

Ponendo $\overline{x_i \oplus y_i} = \overline{Y}$ e $x_i \oplus y_i = Y$ e sostituendo nell'espressione precedente, si ottiene la seguente espressione.

$$z_i = b_i\overline{Y} + \overline{b_i}Y = b_i \oplus Y = b_i \oplus x_i \oplus y_i$$

Per il riporto b_{i+1} si procede in modo analogo.

$$b_{i+1} = \overline{x_i}\,\overline{y_i}b_i + \overline{x_i}y_i\overline{b_i} + \overline{x_i}y_ib_i + x_iy_ib_i = \overline{x_i}b_i + \overline{x_i}y_i + y_ib_i$$