(3.1)
Una cassaforte ha quattro lucchetti, x, y, v, w, che devono essere tutti aperti affinché la cassaforte possa essere aperta. Le chiavi sono distribuite tra tre persone, A, B e C, come segue:

- A possiede le chiavi v e y;
- B possiede le chiavi v e x;
- C possiede le chiavi w e y.

Siano le variabili A, B e C uguali a 1 se la persona corrispondente è presente, altrimenti uguali a 0. Costruire la tavola della verità della funzione *f*(A,B,C) che è uguale ad 1 se e solo se la cassaforte può essere aperta.
Esprimere *f* in forma canonica SP (somma di prodotti).

Soluzione:
Il testo dell'esercizio suggerisce di individuare in A, B C le variabili indipendenti del problema, le quali sono vere se la persona corrispondente è presente. Si può procedere quindi alla realizzazione della tavola di verità. Conviene aggiungere delle colonne extra, che non fanno parte della tavola di verità, ma aiutano in quella che è stata chiamata "interpretazione": nel nostro caso sono state aggiunte le colonne della x, y, v, w, e si è segnata con la lettera p il fatto che la chiave di quel lucchetto fosse presente: è evidente che la funzione deve essere 1 se e solo se ci sono 4 p.

A	B	C	x	y	v	w	*f*
0	0	0					0
0	0	1		p		p	0
0	1	0	p		p		0
0	1	1	p	p	p	p	1
1	0	0		p	p		0
1	0	1		p	p	p	0
1	1	0	p	p	p		0
1	1	1	p	p	p	p	1

Dalla tavola di verità si desume l'espressione somma di prodotti equivalente alla funzione cercata:

$$f(A,B,C) = \overline{A}BC + ABC = BC(\overline{A} + A) = BC$$

In effetti affinché *f*(A,B,C) valga 1, cioè quindi corrisponda all'apertura della cassaforte, si vede necessaria la presenza dei soli B e C, mentre la presenza di A non è strettamente necessaria.

(3.2)
In un laboratorio di informatica deve essere garantita l'assistenza agli studenti per 4 giorni la settimana, da lunedì a giovedì. Il borsista A può essere presente lunedì e mercoledì, il borsista B lunedì e martedì, il borsista C mercoledì e giovedì. Si chiede:

- di costruire la tavola di verità della funzione *f*(A,B,C) che è uguale a 1 se è garantita l'assistenza al laboratorio;
- di esprimere *f* nella forma minima;
- di spiegare a parole il significato del risultato trovato (cioè cosa esprime la *f* trovata).

Soluzione:
Si costruisce la tavola di verità, utilizzando delle colonne ausiliarie e segnando con la lettera c se quel giorno è coperto:

A	B	C	lun	mar	mer	gio	*f*
0	0	0					0
0	0	1			c	c	0
0	1	0	c	c			0
0	1	1	c	c	c	c	1
1	0	0	c		c		0
1	0	1	c		c	c	0
1	1	0	c	c	c		0
1	1	1	c	c	c	c	1

La funzione equivalente della funzione cercata è:

$$f(A,B,C) = \overline{A}BC + ABC = BC(\overline{A} + A) = BC$$

La funzione *f* ci sta a indicare che l’assistenza agli studenti è garantita solamente se i borsisti B e C si presentano nei giorni da loro indicati. In altre parole solo nel caso in cui sia B che C rispettano il i loro giorni è garantita l’assistenza. La presenza o meno del borsista A non è una condizione indispensabile per garantire l’assistenza.

(3.3)
Una macchina per il confezionamento di tre unità di prodotto in appositi alloggiamenti dispone di sensori che rilevano se ogni posizione è piena (= 1) o vuota (= 0). La macchina deve scartare le confezione in cui manca più di una unità di prodotto.
Trovare l'espressione minima della funzione di tre variabili logiche, corrispondenti ai tre sensori, che determina quando deve essere effettuato lo scarto.

Soluzione:
La macchina deve effettuare lo scarto se pezzi mancanti > 1. La tavola di verità della funzione scarto S è:

A	B	C	*pezzi mancanti*	*S*
0	0	0	3	1
0	0	1	2	1
0	1	0	2	1
0	1	1	1	0
1	0	0	2	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0

Quindi:

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

Per la semplificazione, si procede in modo sistematico, secondo le seguenti regole:
- confronto il primo termine con il secondo, poi col terzo e così fino all'ultimo
- ad ogni confronto, verifico che nei termini confrontati ci siano le stesse lettere (al primo giro, questo è sempre verificato; nei successivi, non è detto)
- se ci sono, conto il numero di lettere che cambiano (sono affermate in un termine, negate nell'altro. Ad esempio, tra $\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$ e $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$, cambiano due lettere, la A e la B)
- se cambia una sola lettera (come ad esempio tra $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$ e $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$, dove cambia solo la C), utilizzo il teorema $X\,Y + \overline{X}Y = Y(X + \overline{X}) = Y$, dove Y è la parte che non cambia; chiamo questa operazione *fusione*
- marco i termini che sono stati utilizzati in una fusione
- procedo con il confrontare il secondo temine col terzo, col quarto, e così via, come nei passi precedenti (nota: lo stesso termine può essere utilizzato più volte per la fusione)
- alla fine riporto nella formula finale i termini che non sono stati utilizzati in nessuna fusione
- ricomincio d'accapo dal primo termine, fino a quando non sono più possibili delle fusioni.

Nel nostro caso si ha:

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} =$$
$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + C) + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + B) + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot (\overline{A} + A) =$$
$$\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C}$$

formula che esprime che mancano almeno 2 pezzi.

(3.4)
Si scriva, utilizzando gli operatori booleani AND, OR, NOT, la funzione logica che riceve in ingresso una coppia di numeri binari puri su 2 bit e fornisca il valore *vero* se il primo è maggiore del secondo.

Soluzione:
La *f* che dobbiamo determinare deve essere tale da valere 1 se il numero binario A è maggiore del numero binario B. Possiamo indicare i numeri binari con i loro bit, quindi:
A sarà composta da P(di peso 2^1) e Q(di peso 2^0) e B sarà composto da R(di peso 2^1) e S(di peso 2^0).
Costruisco ora la tavola di verità:

P	Q	R	S	A	B	*f(A>B)*
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	2	0
0	0	1	1	0	3	0
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	2	0
0	1	1	1	1	3	0
1	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**2**	**1**	**1**
1	0	1	0	2	2	0
1	0	1	1	2	3	0
1	**1**	**0**	**0**	**3**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**3**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**3**	**2**	**1**
1	1	1	1	3	3	0

Possiamo ora scrivere la *f* nella forma di somma di prodotti:
f = (¬P)Q(¬R)(¬S)+P(¬Q)(¬R)(¬S)+PS(¬Q)(¬R)+PQ(¬R)(¬S)+PQ(¬R)S+PQR(¬S)

Per la minimizzazione si procede come suggerito nell'esercizio 3), applicando ripetutamente il teorema $XY+\overline{X}Y = Y(X+\overline{X}) = Y$ (per semplicità si è saltato il passaggio intermedio ed è stata adottata l'altra notazione):

$$f = \underset{1}{\overline{P}\cdot Q\cdot\overline{R}\cdot\overline{S}} + \underset{2}{P\cdot\overline{Q}\cdot\overline{R}\cdot\overline{S}} + \underset{3}{P\cdot\overline{Q}\cdot\overline{R}\cdot S} + \underset{4}{P\cdot Q\cdot\overline{R}\cdot\overline{S}} + \underset{5}{P\cdot Q\cdot\overline{R}\cdot S} + \underset{6}{P\cdot Q\cdot R\cdot\overline{S}} =$$

$$\underset{1-4}{Q\cdot\overline{R}\cdot\overline{S}} + \underset{2-3}{P\cdot\overline{Q}\cdot\overline{R}} + \underset{2-4}{P\cdot\overline{R}\cdot\overline{S}} + \underset{3-5}{P\cdot\overline{R}\cdot S} + \underset{4-5}{P\cdot Q\cdot\overline{R}} + \underset{4-6}{P\cdot Q\cdot\overline{S}} =$$

$$\underset{a}{Q\cdot\overline{R}\cdot\overline{S}} + \underset{b}{P\cdot\overline{Q}\cdot\overline{R}} + \underset{c}{P\cdot\overline{R}\cdot\overline{S}} + \underset{d}{P\cdot\overline{R}\cdot S} + \underset{e}{P\cdot Q\cdot\overline{R}} + \underset{f}{P\cdot Q\cdot\overline{S}} =$$

$$\underset{a}{Q\cdot\overline{R}\cdot\overline{S}} + \underset{b-e}{P\cdot\overline{R}} + \underset{c-d}{P\cdot\overline{R}} + \underset{f}{P\cdot Q\cdot\overline{S}} =$$

$$Q\cdot\overline{R}\cdot\overline{S} + P\cdot\overline{R} + P\cdot Q\cdot\overline{S}$$

Nota: nelle righe dispari i termini sono stati etichettati o con numeri o con lettere, nelle righe pari è stata effettuata la fusione ed è stata segnata sotto il termine risultante la provenienza (ad esempio sotto il primo termine della seconda riga, 1-4 segnala che quel termine è stato ottenuto dalla fusione del termine 1 e del termine 4 della riga precedente). Nell'ultimo passaggio poi si è utilizzato il teorema X + X = X (si è eliminato un termine che compariva due volte).

(3.5)
Quattro rappresentanti A, B, C, D fanno parte di un comitato. Sapendo che il voto di A vale 2, il voto di B vale 1.5, mentre i voti di C e D valgono 1 ciascuno, scrivere la funzione booleana che esprima le decisioni del comitato in funzione dei voti dei suoi quattro membri. Fornire anche una spiegazione a parole.

Soluzione:
In base al valore dei singoli voti, la funzione da individuare deve essere tale da assumere valore 0 ogni volta che il comitato(nel rispetto dei valori dei voti) si è espresso in modo contrario, 1 se il comitato si è espresso favorevolmente.
Sapendo che il valore dei voti vale:

A=2
B=1,5
C=1
D=1

costruiamo allora la tavola di verità:

A	B	C	D	*favorevoli*	*contrari*	*f*
0	0	0	0	0	5.5	0
0	0	0	1	1	4.5	0
0	0	1	0	1	4.5	0
0	0	1	1	2	3.5	0
0	1	0	0	1.5	4	0
0	1	0	1	2.5	3	0
0	1	1	0	2.5	3	0
0	**1**	**1**	**1**	**3.5**	**2**	**1**
1	0	0	0	2	3.5	0
1	**0**	**0**	**1**	**3**	**2.5**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**3**	**2.5**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**4**	**1.5**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**3.5**	**2**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**4.5**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**4.5**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**5.5**	**0**	**1**

Scriviamo quindi f nella forma di somma di prodotti:

$$f = \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD$$

Minimizzando:

$$\begin{aligned} f &= \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD = \\ &= BCD + A\overline{B}D + A\overline{C}D + A\overline{B}C + AC\overline{D} + ACD + AB\overline{C} + AB\overline{D} + ABD + ABC = \\ &= BCD + AD + AD + AC + AC + AB + AB = \\ &= BCD + AD + AC + AB = BCD + A(D + C + B) \end{aligned}$$

Il voto di A è pari al voto combinato di C e D, quindi per rendere ininfluente il voto “contrario” di A è necessario che B,C e D votino “favorevole” in modo concorde. Negli altri casi il comitato si può esprimere favorevolmente se un qualsiasi votante tra B,C e D sia concorde al voto “favorevole” di A.

Nota: è stata proposta anche la seguente soluzione, in cui le fusioni non sono state fatte in modo sistematico, ma in modo *naive*, con un riconoscimento “a vista” dei termini che fondono e utilizzando ogni termine una sola volta (i temini iniziali compaiono in ordine inverso rispetto alla prima soluzione):

$$ABCD + ABC\overline{D} + AB\overline{C}D + AB\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}BCD =$$

(usando il teorema $XY + \overline{X}Y = Y$):

$$= ABC(D + \overline{D}) + AB\overline{C}(D + \overline{D}) + A\overline{B}C(D + \overline{D}) + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}D =$$
$$= AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}D =$$
$$= AB + A\overline{B}C + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}D =$$
$$= AB + \overline{A}BCD + A\overline{B}(\overline{C}D + C) =$$ (usando il teorema $X + \overline{X}Y = X + Y$):
$$AB + \overline{A}BCD + A\overline{B}(D + C) =$$
$$AB + \overline{A}BCD + A\overline{B}D + A\overline{B}C =$$
$$A(B + \overline{B}D + \overline{B}C) + \overline{A}BCD =$$
$$A(B + D + \overline{B}C) + \overline{A}BCD =$$
$$A(B + \overline{B}C + D) + \overline{A}BCD =$$
$$A(B + C + D) + \overline{A}BCD$$

La soluzione trovata, $A(B + C + D) + \overline{A}BCD$, dice che una mozione passa se vota favorevole A e almeno uno degli altri B, C o D, oppure se A vota sfavorevole, ma votano favorevole sia B che C che D.

Questa soluzione è corretta, corrisponde al senso comune, ma non è di forma minima, in quanto le “fusioni” non sono state eseguite in modo sistematico. Procedendo in modo sistematico, invece:

$$f = \underset{1}{ABCD} + \underset{2}{ABC\overline{D}} + \underset{3}{AB\overline{C}D} + \underset{4}{AB\overline{C}\overline{D}} + \underset{5}{A\overline{B}CD} + \underset{6}{A\overline{B}C\overline{D}} + \underset{7}{A\overline{B}\overline{C}D} + \underset{8}{\overline{A}BCD} =$$
$$\underset{1-2}{ABC} + \underset{1-3}{ABD} + \underset{1-5}{ACD} + \underset{1-8}{BCD} + \underset{2-4}{AB\overline{D}} + \underset{2-6}{AC\overline{D}} + \underset{3-4}{AB\overline{C}} + \underset{3-7}{A\overline{C}D} + \underset{5-6}{A\overline{B}C} + \underset{5-7}{A\overline{B}D} =$$
$$\underset{a}{ABC} + \underset{b}{ABD} + \underset{c}{ACD} + \underset{d}{BCD} + \underset{e}{AB\overline{D}} + \underset{f}{AC\overline{D}} + \underset{g}{AB\overline{C}} + \underset{h}{A\overline{C}D} + \underset{i}{A\overline{B}C} + \underset{l}{A\overline{B}D} =$$
$$\underset{a-g}{AB} + \underset{a-i}{AC} + \underset{b-e}{AB} + \underset{b-l}{AD} + \underset{c-f}{AC} + \underset{c-h}{AD} + \underset{d}{BCD} =$$
$$AB + AC + AD + BCD =$$
$$A(B + C + D) + BCD$$

(3.6)
Verificare che se A è vera, e A implica B, allora B è vera (in formule, $(A \cdot (A \to B)) \to B$). Realizzare la tavola di verità di questa espressione e verificare che si tratta di una tautologia (è sempre vera).

Soluzione:

$A \to B = (\neg A)+B$	possiamo riscrivere la formula da verificare come
$A(A \to B) = A((\neg A)+B) = A(\neg A)+AB$	ma $X \cdot (\neg X)=0$ quindi
$A(A \to B) = AB$	da cui
$(A(A \to B)) \to B = \neg(AB) + B$	e applicando De Morgan:
$\neg(AB) + B = \neg A + \neg B + B = \neg A + 1 = 1$	quindi è verificato che si tratta di una tautologia

Come verifica possiamo costruire la tavola di verità:

A	B	$A \to B \equiv (\neg A)+B$	$\alpha = A(A \to B)$	$\alpha \to B \equiv (\neg\alpha)+B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

f vale sempre 1, quindi abbiamo verificato che è una tautologia.

(3.7)
Ricavare la funzione booleana che, dato in ingresso un numero di 2 bit, determina se il numero di bit ad 1 è pari.
Estendere il risultato trovato a qualsiasi numero di bit.

Soluzione (di Fabio Sinatra):
La funzione da determinare deve essere tale da valere 1 se il numero di bit ad 1 in ingresso è pari (parità pari).
Indichiamo quindi con A il bit con peso 2^1 e con B il bit con peso 2^0. La tavola di verità sarà:

A	B	*f*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

f vale quindi 1 nei casi 00 e 11. Possiamo ora scrivere *f* nella forma di somma di prodotti:

f = (¬A)(¬B) + AB, che corrisponde all'EX-OR negato: $f = \overline{A \oplus B}$

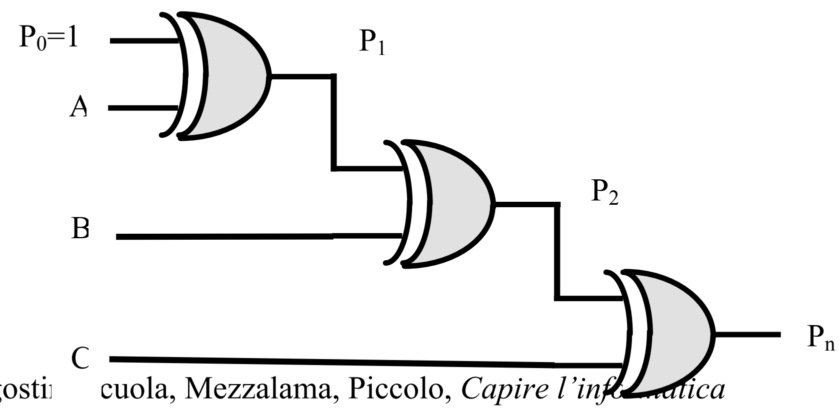
Generalizzazione.
Chiamo P_n la funzione di parità pari tra i primi *n* bit. Se considero il bit di posizione *n*+1, che chiamo C, la funzione di parità pari su *n*+1 bit P_{n+1} si può ricavare da quella su *n* bit, P_n, in base alla tavola di verità seguente:

P_n	C	P_{n+1}	
0	0	0	era dispari, ora c'è 0, resta dispari
0	1	1	era dispari, ora c'è 1, diventa pari
1	0	1	era pari, ora c'è 0, resta pari
1	1	0	era pari, ora c'è 1, diventa dispari

La tavola di verità è quella dell'EX-OR: $P_{n+1} = P_n \oplus C$

Quindi se si hanno N bit, occorre usare l'EX-NOR per i primi due bit, un EX-OR per ogni bit successivo.

Si potrebbero usare solo porte EX-OR, trattando tutti i bit allo stesso modo, se si pone $P_0 = 1$. Così se il primo bit vale 0, $P_1 = 1$, se vale 1, $P_1 = 0$.



È facile verificare che se si pone $P_0 = 0$, lo stesso circuito fornisce l'informazione di parità dispari (= numero di bit a 1 dispari).

Metodo alternativo (contributo di Enzo Tartaglione):

Visto che il numero è su 2 bit chiameremo i bit A e B
Costruisco la tavola di verità:

A	B	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$f = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B = \overline{A \oplus B}$$

Se costruissimo la tavola di verità per 3 bit avremmo che:

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} =$$
$$\overline{A} \cdot (\overline{B} \cdot \overline{C} + B \cdot C) + A \cdot (\overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{C}) =$$
$$\overline{A} \cdot (\overline{B \oplus C}) + A \cdot (B \oplus C) = \overline{A \oplus B \oplus C}$$

Per 4 bit invece:

A	B	C	D	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0

1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
& f = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D \\
& \overline{A}\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{B}\cdot C\cdot D + B\cdot\overline{C}\cdot D + B\cdot C\cdot\overline{D}) + A\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} + B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + B\cdot C\cdot D) = \\
& \overline{A}\cdot(\overline{B}\cdot(\overline{C}\cdot\overline{D} + C\cdot D) + B\cdot(\overline{C}\cdot D + C\cdot\overline{D})) + A\cdot(\overline{B}\cdot(\overline{C}\cdot D + C\cdot\overline{D}) + B\cdot(\overline{C}\cdot\overline{D} + C\cdot D)) = \\
& \overline{A}\cdot(\overline{B}\cdot(\overline{C\oplus D}) + B\cdot(C\oplus D)) + A\cdot(\overline{B}\cdot(C\oplus D) + B\cdot(\overline{C\oplus D})) = \\
& \overline{A}\cdot(\overline{B\oplus C\oplus D}) + A\cdot(B\oplus C\oplus D) = \overline{A\oplus B\oplus C\oplus D}
\end{aligned}
$$

Infine osserviamo che, per un solo bit, si ha:

A	f
0	1
1	0

$$f = \overline{A}$$

Possiamo dunque notare che se chiamiamo f_{n-1} la funzione di parità sui primi n-1 bit e X_n l'n-esimo bit, abbiamo per induzione (ricordando che $\alpha \oplus \beta = \alpha\cdot\overline{\beta} + \overline{\alpha}\cdot\beta$ e che $\overline{\alpha \oplus \beta} = \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} + \alpha\cdot\beta$):

$$f_1 = \overline{A}$$

…

$$f_n = \overline{\overline{f_{n-1}} \oplus X_n} = \overline{f_{n-1}\cdot X_n + \overline{f_{n-1}}\cdot\overline{X_n}} = \overline{\overline{f_{n-1} \oplus X_n}} = f_{n-1} \oplus X_n$$

Contributi.
I seguenti esercizi sono stati realizzati da:
Esercizi 1-2-3-4-5-6-7: Sinatra Fabio Matricola 171038
Esercizio 7: Enzo Tartaglione matricola 172376