

GIANNI CESINI
GIOVANNI LATINI
FABIO POLONARA

Fisica tecnica

seconda edizione



EDIZIONE DIGITALE SU
PANDORA
CAMPUS



CittaStudi
EDIZIONI

APPROFONDIMENTI

Capitolo 13

a cura di:

Gianni Cesini
Giovanni Latini
Fabio Polonara

CONDUZIONE TERMICA IN REGIME STAZIONARIO

13.3.2

APPROFONDIMENTI SULLA CONDUTTIVITÀ TERMICA DEI MATERIALI

13.3.2.1

LA MISURA DELLA CONDUTTIVITÀ TERMICA DEI MATERIALI

La conduttività termica di un materiale è un dato di input fondamentale per la soluzione di problemi di Trasmissione del calore per conduzione. Per questa ragione sono stati messi a punto diversi metodi di misura: tra questi uno molto utilizzato e standardizzato a livello internazionale (Norma tecnica ASTM C 177-97 e ISO 8302) è il metodo “a piastra calda con anello di guardia”. Il metodo è basato essenzialmente sull'uso dell'equazione (13.6) e quindi utilizza un processo di scambio termico stazionario e monodimensionale attraverso il campione di materiale da testare. Il campione è costituito da due provini identici inseriti tra una piastra centrale, riscaldata mediante passaggio di corrente elettrica e due piastre esterne raffreddate ad esempio mediante circolazione forzata di acqua refrigerata. Uno schema semplificato dell'apparato, visto in sezione, è illustrato in Figura 13.7.

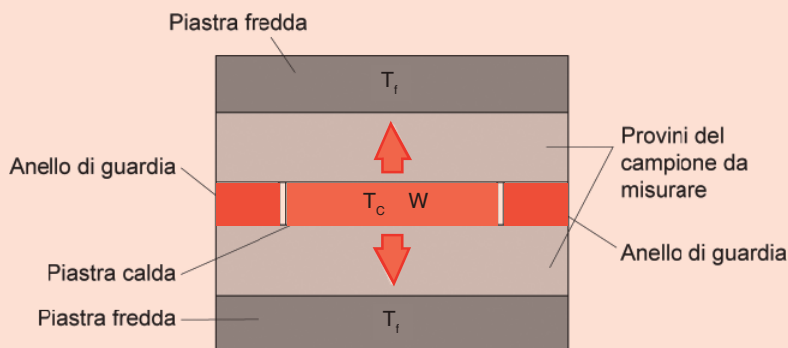


Figura 13.7

Sezione schematica dell'apparecchiatura a piastra calda con anello di guardia

L'elemento riscaldante è costituito da una piastra centrale di area (A) (piastra calda) e da un anello di guardia opportunamente dimensionato mantenuto alla stessa temperatura della piastra calda in modo da impedire il flusso di calore in direzione trasversale. In questo modo si realizza un flusso monodimensionale.

le che dalla piastra calda si trasmette alle piastre refrigerate per conduzione attraverso ciascun provino del materiale da testare. La misura delle temperature (T_c) e (T_f) delle facce della piastra calda e delle piastre fredde a contatto con i provini è effettuata mediante termocoppie, che consentono anche di verificare che le facce siano praticamente isoterme.

La potenza elettrica erogata dal riscaldatore e trasformata in calore per effetto Joule è ($W_e = R_e I^2$), dove (R_e) è la resistenza nota del riscaldatore e (I) è la corrente elettrica di alimentazione misurata mediante un amperometro. Una volta che si è raggiunto lo stato stazionario, grazie all'uso di due provini identici e alla monodimensionalità del flusso si è certi, a meno delle dispersioni verso l'ambiente esterno, che la potenza termica che fluisce attraverso ciascun provino è pari alla metà della potenza elettrica di alimentazione. Al fine di ridurre al minimo le dispersioni verso l'esterno e quindi di diminuire l'incertezza di misura, l'apparato è posto all'interno di un contenitore fortemente isolato termicamente verso l'esterno.

Pertanto, misurando (T_c), (T_f) e (I) ed essendo note (R_e), (A) e (L), si determina la conduttività termica del materiale utilizzando la relazione (13.6):

$$\lambda = \frac{\dot{Q}_k L}{A(T_c - T_f)} = \frac{\frac{W_e}{2} L}{A \Delta T} \quad (13.8)$$

Secondo la normativa tecnica di riferimento, il metodo sopra descritto si applica a materiali isolanti o da costruzione (non buoni conduttori termici) secchi, compatti o cellulari, in fibre o in granuli.

Esempio 13.4

Con un apparato a piastra calda con anello di guardia si intende misurare la conduttività termica di un campione di materiale. Lo spessore di ciascun provino del materiale è $L = 3$ cm. L'area di misura è quadrata con lati $L_y = L_x = 30$ cm. Allo stato stazionario, la potenza elettrica con cui è alimentata la piastra calda è $W_e = 5$ W. La temperatura della faccia calda di ciascun provino è $T_H = 35$ °C e quella della faccia fredda è $T_C = 15$ °C.

Determinare la conduttività termica del materiale in prova.

Analisi

La conduttività termica del materiale in prova può essere determinata utilizzando la relazione 13.8 con:

- $A = L_x \cdot L_y = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$ [m²]
- $L = 3 = 0,03$ [m]
- $\dot{Q}_k = \frac{W_e}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ [W]
- $\Delta T = T_H - T_C = (35 - 15) = 20$ [°C]

Soluzione

Utilizzando la relazione (13.8) e i valori di input sopra riportati si ottiene:

$$\lambda = \frac{\dot{Q}_k L}{A(T_H - T_C)} = \frac{\frac{W}{2} L}{A \Delta T} = \frac{2,5 \cdot 0,03}{0,09 \cdot 20} = 0,042 \quad [\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}]$$

Discussione

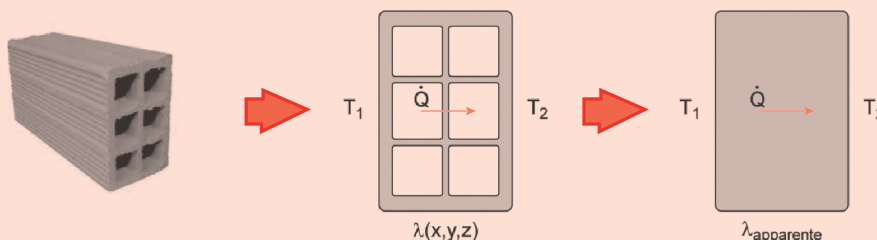
La conduttività termica del materiale è sensibilmente minore di $0,1 [\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}]$, il che mostra che il materiale testato è un buon isolante termico.

13.3.2.2

LA CONDUTTIVITÀ TERMICA APPARENTE

Il modello di strato piano che porta alla relazione risolutiva (13.6) è basato sull'assunzione che il materiale di cui è composta la parete sia omogeneo.

In realtà, la maggior parte dei materiali da costruzione, soprattutto quelli utilizzati in edilizia, non possono essere considerati omogenei. Basti pensare al caso di un laterizio forato (Figura 13.8a) che è costituito da una struttura solida al cui interno sono realizzate cavità di varie dimensioni e distribuzione, occupate da aria atmosferica. È evidente che in un tale elemento strutturale lo scambio termico non sarà mai puramente conduttivo, ma entreranno in gioco anche scambi termici convettivi e radiativi all'interno delle cavità. Nella maggior parte dei casi, però, il progettista non è interessato alla conoscenza precisa della distribuzione di temperatura all'interno delle singole parti costituenti il laterizio. Ciò che si vuole conoscere è essenzialmente la potenza termica trasmessa globalmente tra le sue facce (Figura 13.8b) ed, eventualmente, le temperature a cui si trovano le facce stesse. Allora il laterizio reale può essere modellizzato come un blocco di materiale omogeneo (Figura 13.8c) avente una conduttività termica fittizia, misurabile con tecniche analoghe a quella illustrata nel paragrafo precedente e calcolata mediante la relazione 13.8 e chiamata **conduttività termica apparente**.

**Figura 13.8**

Modello schematico per la definizione della conduttività termica apparente di un laterizio forato

Un altro problema specifico delle applicazioni in edilizia è legato al fatto che le prestazioni termiche dei materiali, soprattutto di quelli utilizzati per la realizzazione dell'involucro esterno, possono variare in modo non trascurabile nel tempo. Tali variazioni possono essere dovute, ad esempio, all'effetto della variazione del contenuto di umidità, dall'invecchiamento, dal costipamento di materiali

sfusi ecc. Per questa ragione nella progettazione si dovrebbe tenere conto di questi effetti, il che, ovviamente, presenta difficoltà non trascurabili. Un valido supporto al progettista viene dalla normativa tecnica. Ad esempio, la norma tecnica UNI EN ISO 10456 fornisce i metodi per valutare i valori di progetto della conduttività termica, oltre che di altre proprietà termofisiche, al variare del contenuto di umidità. Altre norme, forniscono i metodi che devono essere adottati da parte dei produttori di specifici materiali per l'edilizia per dichiarare il valore della conduttività che avrà il materiale al momento della posa in opera, dopo un opportuno periodo di stagionatura.

È evidente, quindi, che, soprattutto nel caso di materiali tecnici per l'edilizia, i valori di conduttività termica reperibili nella letteratura tecnica possono essere utilizzati per un dimensionamento preliminare, mentre per la progettazione esecutiva sarà sempre conveniente fare riferimento a valori dichiarati dai produttori sulla base di certificati emessi da laboratori accreditati.

A conclusione di questo paragrafo in cui si è più volte fatto riferimento alla normativa tecnica, può essere utile sottolineare che le norme sono documenti, molto utilizzati nel campo dell'ingegneria e dell'industria, che forniscono metodi e criteri di progettazione, metodologie di misura, indicazioni su processi produttivi.

Esse sono redatte, pubblicate e commercializzate da enti di standardizzazione nazionali e internazionali. Ad esempio una norma ASTM è redatta dalla American Society for Testing and Material International un organismo di normalizzazione statunitense, una norma ISO è redatta dalla International Organization for Standardization, la più grande organizzazione indipendente, non governativa di standardizzazione al mondo, a cui aderiscono 163 organismi nazionali, una norma EN è elaborata dal CEN (Comité Européen de Normalisation) l'ente europeo di normazione, una norma UNI (Ente Italiano di Normazione) è redatta dall'ente italiano. Pertanto una norma UNI EN ISO è una norma valida a livello internazionale e recepita sia a livello europeo che italiano.

Le norme tecniche sono acquistabili direttamente presso gli organismi di normazione, facilmente contattabili via internet. Esse sono anche consultabili presso biblioteche specializzate, come quelle universitarie, e spesso presso gli ordini professionali.

Va infine sottolineato che l'uso delle norme tecniche non è obbligatorio, ma sempre, comunque, consigliabile in quanto elaborate da commissioni di esperti del settore applicativo specifico e vagliate, prima della loro definitiva adozione, mediante una capillare inchiesta pubblica.

Naturalmente l'uso di una o più norme diventa obbligatorio se viene esplicitamente indicato in una legge nazionale.

[...]

13.3.5

FLUSSO TERMICO CONDUTTIVO MONODIMENSIONALE IN REGIME STAZIONARIO IN UNO STRATO SFERICO

La trattazione vista nei paragrafi precedenti può essere estesa anche al caso di un sistema a simmetria sferica. Si consideri uno strato sferico avente raggio interno (r_i) e raggio esterno (r_e), con $((r_e - r_i) \ll r_i)$. Le due superfici limite, interna ed esterna, sono mantenute isoterme a temperature diverse (T_{si}) e (T_{se}).

L'equazione generale della conduzione, per un mezzo isotropo,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c} \dot{Q}_g'''$$

può essere espressa **in coordinate sferiche**, ricordando dall'analisi matematica che il Laplaciano della temperatura, in tale sistema di coordinate, è dato da:

$$\nabla^2 T = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \Phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$$

dove (r) è la coordinata radiale, (θ) e (Φ) sono le coordinate angolari polari (Figura 13.16b). Si ottiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \Phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{\rho c} \dot{Q}_g''' \quad (13.33)$$

Nel caso di flusso variabile nel tempo in assenza di generazione interna l'eq. (13.19) diventa

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \Phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right]$$

Equazione di Fourier della conduzione termica in coordinate sferiche

Nel caso sia applicabile l'ipotesi di flusso stazionario si ottiene:

$$\left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \Phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{\lambda} \dot{Q}_g''' = 0$$

Equazione di Poisson della conduzione termica in coordinate sferiche

e nel caso di stato stazionario e assenza di generazione interna, si ha:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \Phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0$$

Equazione di Laplace della conduzione termica in coordinate sferiche

Se infine si suppone che il **flusso termico** avvenga in modo **monodimensionale in direzione radiale**, così che le derivate rispetto a (Φ) e a (θ) sono nulle, l'equazione di Laplace in coordinate sferiche si riduce a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (13.34)$$

che può anche essere scritta come

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rT)}{dr^2} = 0 \quad (13.35)$$

Esempio 13.15

Determinare la distribuzione di temperatura all'interno di uno strato sferico omogeneo avente raggio interno (r_i) e raggio esterno (r_e), con ($r_e - r_i \ll r_i$), supponendo che le facce interna ed esterna dello strato siano mantenute isoterme alle temperature, rispettivamente (T_{si}) e (T_{se}), con ($T_{si} > T_{se}$). Si ipotizzi che il flusso termico avvenga in regime stazionario, senza generazione interna di calore.

Analisi

Lo strato sferico è omogeneo, ha spessore trascurabile rispetto alla sua dimensione radiale e le sue superfici interna ed esterna sono mantenute isoterme, con una differenza di temperatura tra di loro ($T_e - T_i$). Tutto ciò fa sì che il flusso possa essere considerato monodimensionale, con direzione radiale e verso che va dalla superficie a temperatura maggiore a quella a temperatura minore.

Applicando anche le altre ipotesi semplificative, il problema si riduce alla soluzione dell'equazione di Laplace della conduzione termica in coordinate sferiche.

Soluzione

L'equazione di Laplace della conduzione termica in coordinate sferiche è data dall'equazione (13.35):

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

che può essere anche scritta come:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rT)}{dr^2} = 0$$

Integrando si ottiene che:

$$T(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (13.36)$$

dove (c_1) e (c_2) sono costanti di integrazione che si ricavano applicando le condizioni al contorno sulle facce dello strato sferico, ovvero ($T(r) = T_{si}$) in ($r = r_i$) e ($T(r) = T_{se}$) in ($r = r_e$) e risolvendo il seguente sistema di due equazioni algebriche:

$$T_{si} = \frac{c_1}{r_i} + c_2$$

$$T_{se} = \frac{c_1}{r_e} + c_2$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ottiene

$$T_{si} - T_{se} = C_1 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right)$$

da cui:

$$C_1 = \frac{T_{si} - T_{se}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}}$$

Sostituendo nella prima si ottiene:

$$C_2 = T_{si} - \frac{T_{si} - T_{se}}{r_i \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right)}$$

Sostituendo le costanti (c_1) e (c_2) così ricavate nella (13.29):

$$T(r) = \frac{T_{si} - T_{se}}{r \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right)} + T_{si} - \frac{T_{si} - T_{se}}{r_i \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right)}$$

da cui si ottiene la soluzione:

$$T(r) = T_{si} - (T_{si} - T_{se}) \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \quad (13.37)$$

Discussione

La relazione (13.37) mostra che anche la temperatura all'interno dello strato sferico, così come nel caso cilindrico, non varia con andamento lineare.

Le superfici isoterme sono sferiche con raggio (r), variabile tra (r_i) e (r_e). Il flusso termico è perpendicolare a tali superfici isoterme e, quindi, avviene in direzione radiale, con verso che va dalla faccia mantenuta a temperatura maggiore a quella che si trova a temperatura minore.

Il flusso termico conduttivo che fluisce attraverso lo strato sferico può essere calcolato utilizzando il postulato di Fourier:

$$\vec{Q}'' = -\lambda \vec{\nabla} T = -grad T$$

dove il gradiente di temperatura in coordinate sferiche è un vettore con componenti date da:

$$\vec{\nabla}T = \left(\frac{\partial T}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}; \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right)$$

Se il flusso termico conduttivo è monodimensionale in direzione radiale, le derivate rispetto alle variabili (Φ) e (θ) sono ambedue nulle e quindi il gradiente della temperatura è un vettore che ha modulo dato da $\left(\frac{dT}{dr} \right)$, direzione radiale e verso concorde con quello lungo il quale la temperatura cresce.

Allora, il gradiente di temperatura all'interno dello strato cilindrico si può ricavare utilizzando la relazione (13.37):

$$\frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr} \left(T_{si} - (T_{si} - T_{se}) \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{T_{si} - T_{se}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \quad (13.38)$$

dove, al solito, (r_i) e (r_e) sono raggio interno e raggio esterno dello strato e (T_{si}) e (T_{se}) sono le temperature della faccia interna e della faccia esterna.

La relazione (13.42) mostra che il gradiente di temperatura anche all'interno di uno strato sferico non è costante, come si aveva per lo strato piano a facce parallele, ma diminuisce all'aumentare del raggio. Ciò comporta che anche la potenza termica per unità di superficie diminuisce proporzionalmente all'inverso del raggio:

$$\dot{Q}_k'' = -\lambda \frac{dT}{dr} = \lambda \frac{1}{r^2} \frac{T_{si} - T_{se}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \quad [\text{W}] \quad (13.39)$$

Anche in questo caso, ciò è dovuto al fatto che la potenza termica che attraversa ogni superficie isoterma, allo stato stazionario e in assenza di generazione interna, per il principio di conservazione dell'energia deve essere costante. Poiché l'area delle superfici isoterme aumenta proporzionalmente al quadrato del raggio, essendo l'area di una sfera di raggio (r) calcolabile come $(A = 4\pi r^2)$, ne consegue che la potenza termica per unità di superficie deve necessariamente diminuire con l'inverso del quadrato del raggio, come previsto dall'eq. (13.39).

La potenza termica che attraversa ogni superficie isoterma di raggio (r) e che quindi fluisce dalla faccia interna a temperatura maggiore a quella esterna a temperatura minore è data da:

$$\dot{Q}_k = \dot{Q}_k'' A = \lambda \frac{T_{si} - T_{se}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi \lambda \frac{T_{si} - T_{se}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \quad [\text{W}]$$

che può anche essere scritta come:

$$\dot{Q}_k = \frac{T_{si} - T_{se}}{\frac{1}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right)} \quad [\text{W}] \quad (13.40)$$

L'equazione (13.40) mostra che anche nel caso di uno strato sferico di materiale omogeneo, in cui si ha un flusso termico conduttivo monodimensionale, in regime stazionario, in assenza di generazione interna di calore, si può utilizzare il modello resistivo basato sull'analogia elettrica.

Infatti lo strato sferico può essere sostituito con una resistenza termica (R_k) il cui valore si ricava dalla relazione (13.25) scritta in modo analogo alla legge di Ohm:

$$\dot{Q}_k = \frac{T_{si} - T_{se}}{\frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right)} = \frac{T_{si} - T_{se}}{R_k} \quad [\text{W}]$$

da cui si ricava

$$R_k = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right) \quad [\text{K W}^{-1}] \quad (13.41)$$

La conduttanza termica di uno strato cilindrico è data da

$$G_k = \frac{1}{R_k} = \frac{2\pi L\lambda}{\ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)} \quad [\text{W K}^{-1}]$$

13.4.1

IL METODO DEL FATTORE DI FORMA PER LA CONDUZIONE TERMICA

Nel caso che si incontra più spesso nella pratica ingegneristica, ovvero la Trasmissione del calore in regime stazionario in assenza di generazione interna, può essere utilizzato un metodo risolutivo semplificato che può essere derivato da un'analisi dei risultati ottenuti per il calcolo della potenza termica trasmessa per conduzione attraverso uno strato piano, cilindrico o sferico con flusso monodimensionale.

Nel caso di strato piano la soluzione è data dalla relazione (13.6) che può essere scritta come:

$$\dot{Q}_{k,x} = \frac{A}{L_x} \lambda \Delta T \quad [\text{W}]$$

dove (A) è la superficie frontale, (L_x) è lo spessore dello strato e il pedice (x) indica che il flusso avviene in una sola direzione.

Per uno strato cilindrico, la soluzione è data dalla relazione (13.31) che può essere scritta come:

$$\dot{Q}_{k,r} = \frac{2\pi L}{\ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)} \lambda \Delta T \quad [\text{W}]$$

dove (r_i) ed (r_e) sono, rispettivamente, il raggio interno ed esterno, (L) è la lunghezza dello strato e il pedice r indica che il flusso avviene solo in direzione radiale.

Per uno strato sferico la soluzione è data dalla relazione (13.41) che può essere scritta come:

$$\dot{Q}_{k,r} = \frac{4\pi}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}\right)} \lambda \Delta T \quad [\text{W}]$$

dove (r_i) ed (r_e) sono, rispettivamente, il raggio interno ed esterno dello strato e il pedice (r) indica che il flusso avviene solo in direzione radiale.

In tutte e tre le relazioni precedenti ΔT è la differenza di temperatura esistente tra le facce dello strato, che provoca il flusso di calore.

Esaminando le tre soluzioni risulta evidente che la potenza termica che fluisce attraverso lo strato è sempre proporzionale alla differenza di temperatura (ΔT), alla conduttività termica (λ) e a un termine, espresso in modo diverso a seconda della simmetria dello strato, ma che ha una struttura analoga nei tre casi. Ovvero ha sempre le dimensioni di una lunghezza e dipende soltanto da parametri geometrici: superficie frontale e spessore nel caso dello strato piano, raggio interno, raggio esterno e lunghezza nel caso dello strato cilindrico, raggio interno e raggio esterno nel caso dello strato sferico.

Allora le diverse soluzioni sopra riportate possono essere scritte in forma estremamente compatta come:

$$\dot{Q}_k = S_k \lambda \Delta T \quad [\text{W}] \quad (13.42)$$

dove (S_k) è il fattore di forma per la conduzione termica, che vale $\left(\frac{A}{L}\right)$ per lo

strato piano, $\left(\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\right)$ per lo strato cilindrico e $\left(\frac{4\pi}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}\right)}\right)$ per lo strato sferico.

Il risultato espresso dalla relazione (13.42) ottenuto per la conduzione termica monodimensionale in sistemi con particolari simmetrie, può in realtà essere utilizzato anche per problemi più complessi in cui il flusso termico è multidimensionale.

Le condizioni di applicabilità della soluzione nella forma espressa dalla (13.42) sono:

1. Flusso stazionario
2. Mezzo omogeneo, con conduttività termica uniforme e indipendente dalla temperatura
3. Assenza di generazione interna
4. Superfici tra le quali si ha il flusso termico isoterme con differenza di temperatura ΔT tra di loro.

I valori del fattore di forma per conduzione (S_k) per le diverse configurazioni di interesse ingegneristico sono stati ricavati risolvendo l'equazione di Laplace per la conduzione termica e sono reperibili nella letteratura tecnica, come ad esempio in:

P.J. Schneider, *Conduction, Interface Resistance*, in W. Rohsenow e J.P. Hartnett Eds., *Handbook of Heat Transfer – Fundamentals*, McGraw-Hill, New York, 1985.

Di seguito vengono riportati alcuni esempi per situazioni di scambio termico di particolare interesse pratico.

13.4.1.1

CONFIGURAZIONI CON PARETI PIANE

Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
Strato piano	$\frac{A}{L}$	$L \ll w$ $L \ll h$

Legenda:

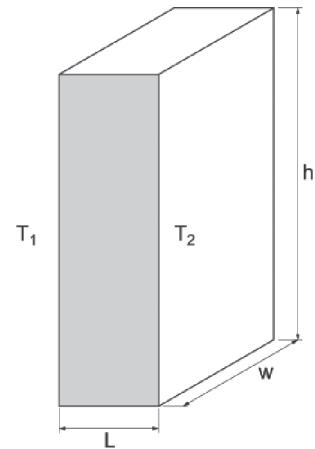
$A = w \cdot h$ = superficie frontale

L = spessore dello strato

T_1 = temperatura di una faccia

T_2 = temperatura dell'altra faccia

Figura 13.20



Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
Spigolo fra due pareti perpendicolari, di uguale spessore	$S = 0,54w$	

Legenda:

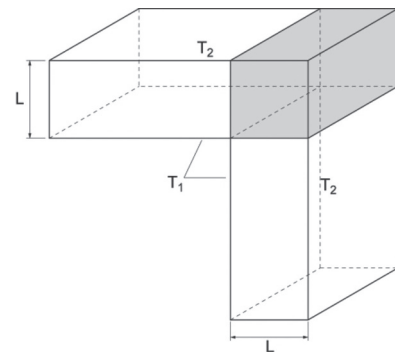
w = larghezza dello spigolo

L = spessore di ciascuna parete

T_1 = temperatura delle facce interne delle pareti

T_2 = temperatura delle facce esterne delle pareti

Figura 13.21



Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
Angolo fra tre pareti perpendicolari, di uguale spessore	$S = 0,15L$	

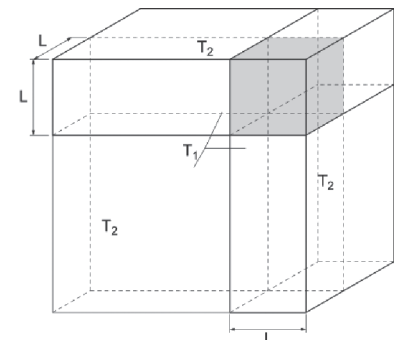
Legenda:

L = spessore dello spigolo = spessore di ciascuna parete

T_1 = temperatura delle facce interne delle pareti

T_2 = temperatura delle facce esterne delle pareti

Figura 13.22



13.4.1.2 CONFIGURAZIONI CON TUBI E CONDOTTI

Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
Strato cilindrico	$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$	$r_e - r_i \ll L$

Legenda:

L = lunghezza del cilindro

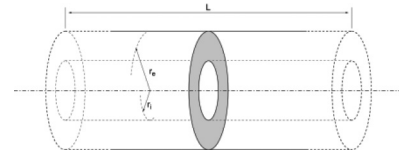
 r_i = raggio interno dello strato cilindrico r_e = raggio esterno dello strato cilindrico T_1 = temperatura della faccia interna dello strato cilindrico T_2 = temperatura della faccia esterna dello strato cilindrico

Figura 13.23

Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
Cilindro isoterma all'interno di un mezzo semi-infinito, parallelo alla superficie del mezzo	$S_k = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4z}{D}\right)}$	$L \gg D$ $z > 1,5 D$

Legenda:

L = lunghezza del cilindro

D = diametro del cilindro

z = profondità a cui è posto l'asse del cilindro

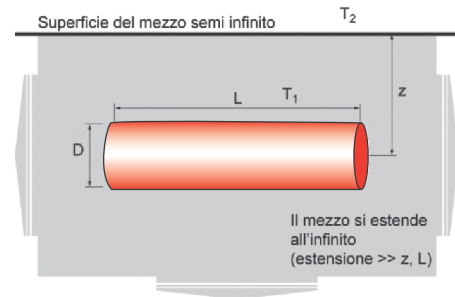
 T_1 = temperatura della superficie esterna del cilindro T_2 = temperatura della superficie del mezzo semi-infinito

Figura 13.24

Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
Cilindro isoterma, posto all'interno di un mezzo semi-infinito, perpendicolare alla superficie del mezzo	$S_k = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4L}{D}\right)}$	$L \gg D$

Legenda:

L = lunghezza del cilindro

D = diametro del cilindro

 T_1 = temperatura della superficie esterna del cilindro T_2 = temperatura della superficie del mezzo semi-infinito

Figura 13.25

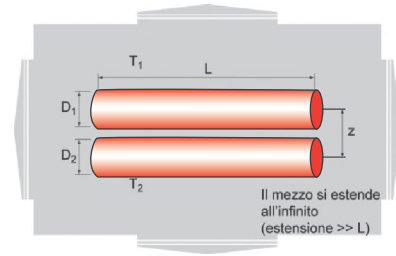
Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
-----------	------------------------	------------------------

Due cilindri isotermini posti all'interno di un mezzo infinito

$$S_k = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$$

$L \gg D_1$
 $L \gg D_2$
 $L \gg z$

Figura 13.26



Legenda:

L = lunghezza di ciascun cilindro
 D_1 = diametro del primo cilindro
 T_1 = temperatura della superficie esterna del primo cilindro
 D_2 = diametro del secondo cilindro
 T_2 = temperatura della superficie del secondo cilindro
 z = distanza tra gli assi dei due cilindri

Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
-----------	------------------------	------------------------

Condotto a sezione quadrata

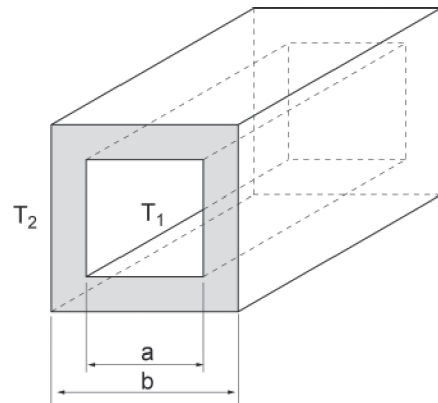
$$S_k = \frac{2\pi L}{0,93 \ln\left(0,948 \frac{a}{b}\right)}$$

$\frac{b}{a} > 1,41$

$$S_k = \frac{2\pi L}{0,785 \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$\frac{b}{a} < 1,41$

Figura 13.27



Legenda:

L = lunghezza del condotto
 a = lato interno del condotto
 b = lato esterno del condotto
 T_1 = temperatura della superficie interna del condotto
 T_2 = temperatura della superficie esterna del condotto

13.4.1.3

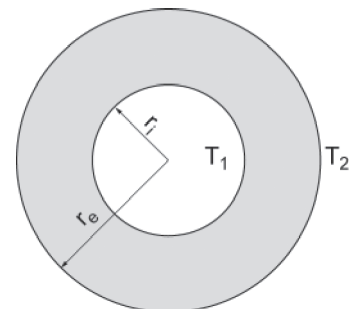
CONFIGURAZIONI CON SFERE

Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
-----------	------------------------	------------------------

Strato sferico

$$S_k = \frac{4\pi}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}\right)}$$

Figura 13.28



Legenda:

r_1 = raggio interno dello strato
 T_1 = temperatura della superficie interna dello strato
 r_2 = raggio esterno dello strato
 T_2 = temperatura della superficie esterna dello strato

Geometria	Fattore di forma S_k	Condizioni di validità
-----------	------------------------	------------------------

**Sfera isoterma
posta all'interno
di un mezzo
semi-infinito**

$$S_k = \frac{2\pi D}{1 - 0,25 \frac{D}{z}}$$

Legenda:

D = diametro della sfera

z = distanza tra il centro della sfera e la superficie del mezzo semi-infinito

T_1 = temperatura della superficie della sfera

T_2 = temperatura della superficie del mezzo semiinfinito

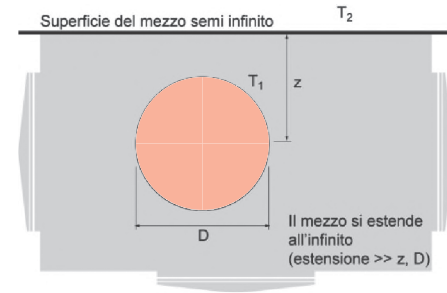


Figura 13.29

Esempio 13.16

Il petrolio greggio viene generalmente trasportato mediante oleodotti dai luoghi di estrazione alle raffinerie o ai porti di imbarco su petroliere. Altrettanto avviene tra i porti di sbarco e le raffinerie. Per limitare l'impatto ambientale e per ragioni di sicurezza spesso gli oleodotti sono interrati.

Per effettuare il trasporto all'interno delle tubazioni dell'oleodotto, il petrolio deve essere ripressurizzato in apposite stazioni di pompaggio, per compensare le perdite di carico per interazione viscosa tra il fluido in moto e le pareti delle tubazioni. L'energia spesa per il pompaggio dipende dalla viscosità del petrolio, che aumenta al diminuire della sua temperatura. Per questa ragione, in alcuni oleodotti è previsto che nelle stazioni di pompaggio il petrolio venga anche riscaldato per compensare la potenza termica dispersa verso l'ambiente e quindi il raffreddamento del petrolio stesso.

Si consideri una condotta orizzontale costituita da una tubazione con diametro esterno ($D = 50$) cm interrata a una profondità ($z = 1$) m sotto la superficie del terreno.

La temperatura della superficie esterna del tubo è ($T_1 = 60$ °C) e la temperatura della superficie del suolo è ($T_2 = 20$ °C).

Assumendo che la conduttività termica del terreno sia ($\lambda = 0,7$ W m⁻¹ K⁻¹), calcolare la potenza termica dissipata dal tubo per unità di lunghezza.

Analisi

Assunzioni

- 1) Stato stazionario
- 2) Assenza di generazione interna
- 3) Proprietà termofisiche uniformi e costanti
- 4) Lunghezza della tubazione molto maggiore del suo diametro

La Trasmissione del calore tra tubazione e terreno avviene per conduzione e può essere considerata con buona approssimazione bidimensionale, in quanto è trascurabile lo scambio termico assiale.

Il problema può essere risolto mediante il metodo del fattore di forma per conduzione, che per una lunga tubazione interrata orizzontalmente in un mezzo semi-infinito è dato da:

$$S_k = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4z}{S}\right)}$$

Soluzione

La potenza termica dissipata dal tubo è data da:

$$\dot{Q}_k = S_k \lambda \Delta T = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4z}{S}\right)} \lambda (T_1 - T_2)$$

e, quindi, la potenza termica per unità di lunghezza del tubo è data da:

$$\frac{\dot{Q}_k}{L} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{4z}{S}\right)} \lambda (T_1 - T_2)$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\frac{\dot{Q}_k}{L} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{4z}{S}\right)} \lambda (T_1 - T_2) = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{4 \cdot 1}{0,50}\right)} 0,7 \cdot 40 = 58 \quad [\text{W m}^{-1}]$$

Discussione

Si noti preliminarmente che è stata utilizzata la relazione (13.42), che però è soggetta a limitazioni, nel senso che essa è applicabile con buona approssimazione se:

- 1) la lunghezza della tubazione è molto maggiore del diametro;
- 2) la profondità di interrimento è maggiore di una volta e mezzo il diametro della tubazione, ovvero ($z > 1,5D$).

La prima condizione è ovviamente verificata. Per quanto riguarda la seconda si ha:

$$z = 1 > 1,5D = 1,5 \cdot 0,5 = 0,75 \quad [\text{m}]$$

per cui anche essa è verificata.