

GIANNI CESINI
GIOVANNI LATINI
FABIO POLONARA

Fisica tecnica

seconda edizione



EDIZIONE DIGITALE SU
PANDORA
CAMPUS



CittaStudi
EDIZIONI

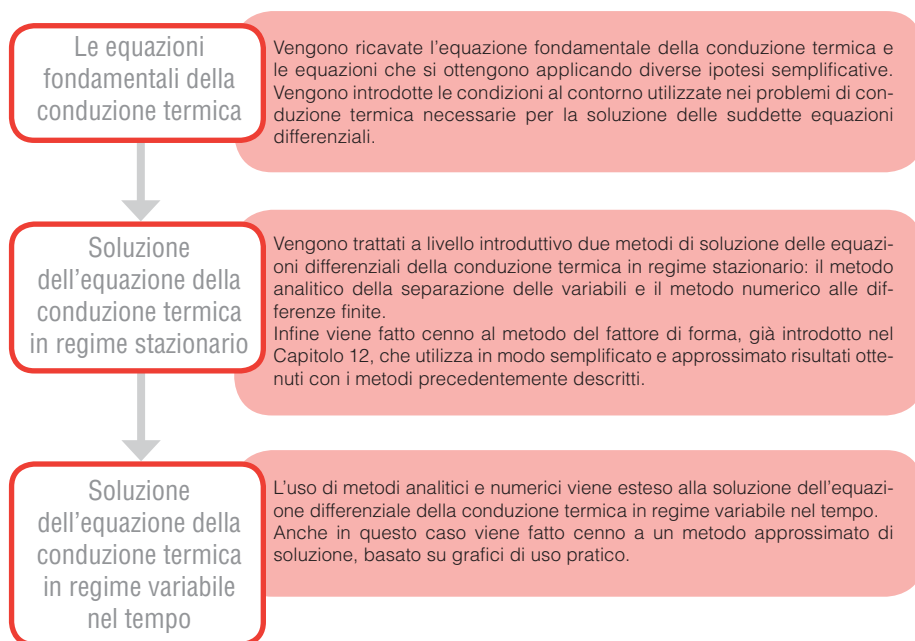
APPROFONDIMENTI

Capitolo 19

a cura di:

Gianni Cesini
Giovanni Latini
Fabio Polonara

APPROFONDIMENTI DI TRASMISSIONE DEL CALORE



19.1

LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA CONDUZIONE TERMICA

L'equazione generale della conduzione termica, introdotta senza dimostrazione nel **Capitolo 12**, può essere ricavata utilizzando il postulato di Fourier e l'equazione di conservazione dell'energia, espressa dal primo principio della termodinamica, che in questa trattazione verranno applicati a un mezzo materiale solido, opaco, in quiete, le cui variazioni di volume dovute a variazioni della sua temperatura possono essere ritenute trascurabili rispetto al volume stesso.

Il postulato di Fourier permette di calcolare la potenza termica specifica trasmessa in un punto P generico all'interno del solido in funzione del gradiente di temperatura esistente nel punto P considerato

$$\vec{Q}'' = -\lambda \vec{\nabla} T = -\text{grad } T \quad (19.1.1)$$

dove, nel caso in cui si utilizzi un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z :

- \vec{Q}'' ($\dot{Q}''_x, \dot{Q}''_y, \dot{Q}''_z$) è il vettore potenza termica trasmessa per unità di superficie di scambio, in $[W/m^2]$, detto anche flusso termico specifico;
- $\lambda = \lambda(x, y, z, T)$ è la conduttività termica del materiale nel punto P e alla temperatura T , in $[W/(m \cdot K)]$;
- $T = T(x, y, z, t)$ è la temperatura nel punto P con coordinate cartesiane (x, y, z) all'istante di tempo t , in kelvin $[K]$;
- $\vec{\nabla}$ è l'operatore "nabla", che applicato al campo scalare T lo trasforma nel campo vettoriale $grad T$;
- $\vec{\nabla} T = grad T$ è il gradiente di temperatura nel punto (x, y, z) considerato, in $[K/m]$.

In coordinate cartesiane si ha

$$\vec{\nabla} T = grad T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{n}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{n}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{n}_z \quad (19.1.2)$$

dove \vec{n}_x, \vec{n}_y e \vec{n}_z sono i versori unitari lungo gli assi cartesiani. Il gradiente della temperatura nel punto P ha direzione perpendicolare alla superficie isoterma passante per il punto P e verso concorde con quello lungo il quale la temperatura cresce, per cui il flusso termico specifico \vec{Q}'' fluisce nel verso lungo il quale la temperatura diminuisce, come previsto dal secondo principio della termodinamica.

Si noti, inoltre, che l'espressione (19.1.1) vale per un mezzo isotropo, ovvero un materiale le cui proprietà sono indipendenti dalla direzione considerata. Questa ipotesi vale per la maggior parte dei materiali da costruzione a eccezione, per esempio, del legno.

L'equazione generale della conduzione termica può essere ricavata utilizzando il primo principio della termodinamica in termini di potenze

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q}_{net} + \dot{Q}_{gen} + \dot{L} \quad (19.1.3)$$

dove

- U = energia interna del sistema, in $[J]$;
- t = tempo, in secondi $[s]$;
- $\frac{\partial U}{\partial t}$ = variazione nel tempo dell'energia interna del sistema, in $[W]$;
- \dot{Q}_{net} = potenza termica netta scambiata tra sistema e ambiente, in $[W]$;
- \dot{Q}_{gen} = potenza termica generata all'interno del sistema, in $[W]$;
- \dot{L} = potenza meccanica scambiata tra sistema e ambiente, in $[W]$.

Considerando che per un mezzo solido, in quiete, con volume costante $\dot{L} = 0$ si ha

$$\dot{Q}_{net} + \dot{Q}_{gen} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (19.1.4)$$

Ognuno dei termini che compaiono nella relazione (19.1.4) può essere ricavato considerando un volume di controllo V (vedi Figura 19.1.1):

- $\frac{\partial U}{\partial t} = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV$, dove ρ è la densità, in $[kg/m^3]$, e c è il calore specifico, in $[J/(kg \cdot K)]$, del mezzo;
- $\dot{Q}_{net} = - \int_S \vec{Q}'' \cdot \vec{n} dS$, dove dS è un elemento infinitesimo della superficie che racchiude il volume di controllo V e \vec{n} è il versore perpendicolare uscente dalla superficie;
- $\dot{Q}_{gen} = \int_V \dot{Q}_{gen}''' dV$ dove \dot{Q}_{gen}''' è la potenza termica per unità di volume, in $[W/m^3]$, generata all'interno del volume di controllo.

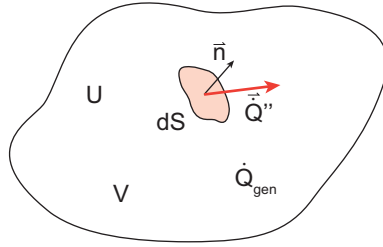


Figura 19.1.1

Volume di controllo a cui viene applicato il primo principio della termodinamica.

Sostituendo ciascun termine nella relazione 19.4 si ottiene

$$- \int_S \vec{Q}'' \cdot \vec{n} dS + \int_V \dot{Q}_{gen}''' dV = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (19.1.5)$$

Utilizzando il teorema di Gauss (o teorema della divergenza) il primo termine diventa

$$- \int_S \vec{Q}'' \cdot \vec{n} dS = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}'' dV \quad (19.1.6)$$

dove $\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}'' = \text{div} \vec{Q}''$ è la divergenza del vettore \vec{Q}'' che in coordinate cartesiane è data da

$$\text{div} \vec{Q}'' = \frac{\partial \dot{Q}''_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{Q}''_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{Q}''_z}{\partial z}$$

Sostituendo la (19.1.6) nella (19.1.5) si ottiene

$$- \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}'' dV + \int_V \dot{Q}_{gen}''' dV = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

e quindi, essendo il volume di integrazione lo stesso per i tre integrali:

$$\int_V \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}'' - \dot{Q}_{gen}''' \right) dV = 0$$

Poiché il volume V è arbitrario, l'argomento dell'integrale deve essere identicamente nullo, ovvero

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} - \dot{Q}_{gen} = 0$$

da cui sostituendo nel secondo termine la relazione (19.1) che esprime il postulato di Fourier si ottiene

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} T) - \dot{Q}_{gen} = 0$$

da cui

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \dot{Q}_{gen} \quad (19.1.7)$$

La (19.1.7) è l'equazione generale della conduzione per un mezzo materiale solido isotropo.

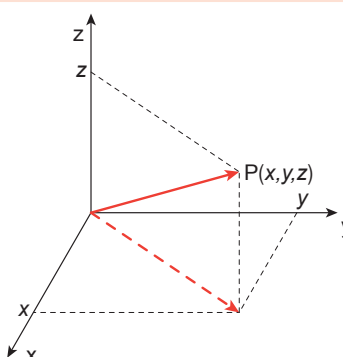
Se il mezzo è anche omogeneo, ovvero ha proprietà indipendenti dalla posizione, la conduttività termica λ può essere portata fuori dalla divergenza, per cui $\vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = \lambda \nabla^2 T$ dove $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$ è l'operatore Laplaciano. L'equazione (19.1.7) può allora essere scritta come $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c} \dot{Q}_{gen}$ e ricordando che $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ è la diffusività termica del mezzo solido, si ottiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c} \dot{Q}_{gen} \quad (19.1.8)$$

che è l'equazione generale della conduzione per un mezzo isotropo e omogeneo.

L'equazione (19.1.8) assume forme diverse a seconda del sistema di coordinate con cui viene espresso il laplaciano $\nabla^2 T$. Nella tabella seguente sono riportate le espressioni del Laplaciano della temperatura in coordinate cartesiane ortogonali, in coordinate cilindriche e in coordinate sferiche.

Tabella 19.1.1
Espressione
del Laplaciano
in diversi sistemi
di coordinate.

Sistema di coordinate	Schema	Espressione del Laplaciano
Cartesiane ortogonali		$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
con flusso monodimensionale nella direzione x		$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Sistema di coordinate	Schema	Espressione del Laplaciano
Cilindriche		$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
con propagazione radiale, ovvero nella sola direzione r		$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$
Sferiche		$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$
con propagazione radiale, ovvero nella sola direzione r		$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$

19.1.1

EQUAZIONE DI FOURIER, EQUAZIONE DI POISSON, EQUAZIONE DI LAPLACE DELLA CONDUZIONE TERMICA

L'equazione fondamentale della conduzione (19.1.8) consente di ricavare la distribuzione di temperatura in un mezzo solido isotropo e omogeneo. Essa può però essere espressa in forma semplificata quando siano applicabili opportune ipotesi sulla dipendenza o meno dal tempo dei processi di scambio termico e quindi della temperatura, sulla presenza di sorgenti di calore che danno luogo a generazione di energia termica all'interno del mezzo e sulla direzione del flusso di calore.

I risultati dell'applicazione di tali ipotesi semplificativa sono stati ricavati negli Esempi 12.2, 12.3 e 12.4 del Capitolo 12 e sono riassunti in forma schematica nella Tabella 19.1.2.

Tipo di processo di scambio termico	Denominazione	Equazione	
		Formula	Numero
Conduzione non stazionaria con generazione di calore	Equazione fondamentale della conduzione	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c} \dot{Q}_{gen}'''$	(19.1.8)
Conduzione non stazionaria senza generazione di calore	Equazione di Fourier	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$	(19.1.9)

Tabella 19.1.2

Equazioni differenziali della conduzione termica per un mezzo isotropo, omogeneo, con proprietà termiche indipendenti dalla temperatura.

Tipo di processo di scambio termico	Equazione		
	Denominazione	Formula	Numero
Conduzione stazionaria con generazione interna di calore	Equazione di Poisson	$\nabla^2 T + \frac{1}{\lambda} \dot{Q}_{gen}''' = 0$	(19.1.10)
Conduzione stazionaria senza generazione interna di calore	Equazione di Laplace	$\nabla^2 T = 0$	(19.1.11)

Nelle equazioni differenziali riportate in **Tabella 19.1.2** il laplaciano $\nabla^2 T$ è esprimibile con una delle espressioni riportate in **Tabella 19.1.1** a seconda del particolare sistema di coordinate utilizzato. Appare quindi scontato il fatto che la soluzione di tali equazioni risulta molto semplificata nel caso in cui si possa applicare al problema considerato un'ipotesi semplificativa sulla direzione del flusso di calore, come, per esempio, che lo scambio termico avvenga in modo monodimensionale.

Nel **Capitolo 13** l'attenzione è stata concentrata proprio sul caso della conduzione termica in regime stazionario senza generazione interna di calore con **flusso monodimensionale**, il che porta a una sostanziale semplificazione della soluzione dei problemi, per esempio utilizzando il metodo risolutivo dell'analogia elettrica.

Nel presente Capitolo di approfondimento l'analisi verrà dedicata alla formulazione di metodi risolutivi applicabili a problemi più complessi che coinvolgano processi di scambio termico conduttivo con flussi multidimensionali anche in regime variabile nel tempo.

19.1.2

CONDIZIONI INIZIALI E AL CONTORNO

Le equazioni della conduzione, riportate in **Tabella 19.2**, sono equazioni differenziali del secondo ordine la cui soluzione richiede di determinare le costanti di integrazione che si ottengono conoscendo:

- le **condizioni al contorno**;
- nel caso di regime transitorio, la **condizione iniziale** sull'intero volume del sistema considerato.

La **condizione iniziale** fissa la distribuzione di temperatura all'istante di tempo $t=0$ in qualunque punto all'interno del volume del sistema e sulla superficie che lo delimita. In coordinate cartesiane può essere espressa come:

$$T(x,y,z,t=0) = f(x,y,z) \text{ per } \forall (x,y,z) \in V$$

La condizione iniziale più utilizzata è quella di temperatura uniforme $T(x,y,z,0) = T_0$.

Le **condizioni al contorno** descrivono la situazione di interazione termica tra la superficie S che delimita il volume V del sistema considerato e l'ambiente circostante.

Il volume V può essere racchiuso da una superficie S su cui si ha la stessa condizione al contorno (**Figura 19.1.2a**) o che può essere costituita da più parti in cui si possono avere condizioni al contorno diverse (**Figura 19.1.2b**).

Le condizioni al contorno che si utilizzano più frequentemente in problemi di conduzione termica sono descritte schematicamente nella Tabella 19.1.3.

Condizione al contorno	Grandezza specificata sulla superficie S	
di 1° tipo o di Dirichlet	Temperatura T_s fissata in ogni punto e a ogni istante di tempo	$T_s = f(x, y, z, t)$
	<i>Casi particolari</i>	
	Temperatura T_s stazionaria	$T_s = f(x, y, z)$
	Temperatura T_s stazionaria e uniforme	$T_s = \text{cost}$
	Condizione omogenea	$T_s = 0$
di 2° tipo o di Neumann	Flusso termico specifico \dot{Q}_s'' fissato in ogni punto e a ogni istante di tempo	$\dot{Q}_s'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big _s = f(x, y, z, t)$
	<i>Casi particolari</i>	
	Flusso termico specifico \dot{Q}_s'' stazionario	$\dot{Q}_s'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big _s = f(x, y, z)$
	Flusso termico specifico \dot{Q}_s'' stazionario e uniforme	$\dot{Q}_s'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big _s = \text{cost}$
	Flusso termico specifico \dot{Q}_s'' nullo: \rightarrow superficie S adiabatica	$\dot{Q}_s'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big _s = 0$
	Condizione omogenea	
di 3° tipo o di Robin o convettiva	Flusso termico specifico \dot{Q}_s'' proporzionale alla temperatura T_s della superficie S	$\dot{Q}_s'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big _s = h(T_s - T_\infty)$
	È il caso in cui si abbia scambio termico convettivo, con coefficiente convettivo h , tra la superficie S a temperatura T_s e un fluido con temperatura di fluido indisturbato T_∞ .	
	La condizione può anche essere utilizzata nel caso radiativo se è possibile linearizzare la Legge di Stefan-Boltzmann. In questo caso h rappresenta il coefficiente di scambio termico radiativo.	
	Condizione omogenea	$\dot{Q}_s'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big _s = hT_s$
di 4° tipo	Continuità del flusso termico specifico scambiato per conduzione all'interfaccia tra due solidi, aventi conduttività termiche diverse λ_1 e λ_2 e temperature T_1 e T_2.	$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big _s = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big _s$
	Se il contatto termico è perfetto, ovvero se si può assumere che la resistenza di contatto sia nulla	$T_{s_1} = T_{s_2}$
	Questa condizione può anche essere vista come un caso particolare di quella di 2° tipo o, nel caso di resistenza di contatto assunta con buona approssimazione uguale a zero, di quella di 1° tipo.	

Le condizioni al contorno, di cui alla Tabella 19.1.3, sono lineari, in quanto non c'è una dipendenza da una potenza della temperatura T_s di ordine superiore a 1. Questo consente di ottenere soluzioni basate sul principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero costituite da combinazioni lineari di singole soluzioni,

Tabella 19.1.3

Condizioni al contorno generalmente utilizzate in problemi di conduzione termica.

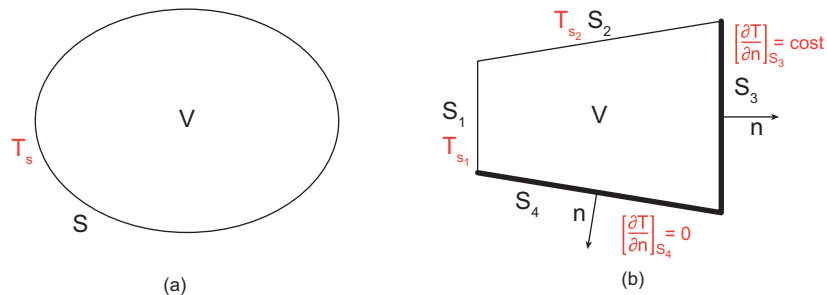
come, per esempio, nel caso dei metodi risolutivi basati sulla separazione delle variabili.

Tale importante proprietà non vale più, per esempio, nel caso in cui il coefficiente di scambio termico convettivo nella condizione di 3° tipo dipenda dalla temperatura.

Casi di questo tipo non saranno considerati nella presente trattazione.

Va, infine, sottolineato che una certa condizione al contorno può essere imposta su tutta la superficie esterna S , come, a titolo di esempio, in Figura 19.1.2a, ma si può anche avere una situazione in cui la superficie esterna sia costituita da più elementi di superficie in ciascuno dei quali può essere imposta una diversa condizione, come, sempre a titolo di esempio, in Figura 19.2b.

Figura 19.1.2
Volume di controllo V racchiuso dalla superficie S in cui si ha una condizione al contorno (a) e volume V racchiuso da una superficie costituita dalle superfici S_1 , S_2 , S_3 e S_4 in cui si hanno condizioni al contorno diverse (b).



19.2

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA CONDUZIONE TERMICA IN REGIME STAZIONARIO

Le equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono problemi di trasmissione del calore per conduzione possono essere risolte tramite metodi che consentono di ottenere risultati costituiti da formule analitiche (**metodi analitici**), il che costituisce un indubbio vantaggio che spesso è, però, ridotto dalla presenza nella struttura della soluzione di integrali, funzioni speciali eccetera, che ne riducono fortemente l'utilizzabilità pratica.

Un secondo metodo di soluzione, oggi sempre più utilizzato grazie alla disponibilità di sistemi di calcolo elettronico sempre più potenti, veloci ed efficienti, è quello basato su tecniche numeriche (**metodi numerici**), come, per esempio, i metodi alle differenze finite o agli elementi finiti.

In primo luogo, tali metodi verranno applicati a problemi di conduzione termica in regime stazionario, ovvero per sistemi in cui la temperatura dipende unicamente dalle variabili spaziali e non dal tempo. Come ulteriore ipotesi semplificativa considereremo il materiale che costituisce il sistema come isotropo e omogeneo, per cui il problema sarà descritto matematicamente dall'equazione di Poisson e, in assenza di generazione interna di calore, dall'equazione di Laplace.

19.2.1

SOLUZIONE CON METODI ANALITICI

Tra i diversi metodi analitici utilizzabili per la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, viene qui trattato il classico **metodo della separazione delle variabili**, applicato alla soluzione dell'equazione di Laplace della conduzione termica. Per semplicità viene considerato un caso bidimensionale ma l'estensione al caso tridimensionale non pone particolari difficoltà.

Il metodo viene utilizzato per determinare la distribuzione di temperatura, in regime stazionario, nel sistema di Figura 19.2.1, costituito da una piastra rettangolare solida, costituita da materiale isotropo e omogeneo con conduttività termica λ indipendente dalla temperatura, avente i lati paralleli agli assi x e y di lunghezza L_x e L_y e lo spessore in direzione z trascurabile. Tre lati sono mantenuti a temperatura costante T_0 e il quarto lato a temperatura costante T_1 .

La distribuzione di temperatura $T(x,y)$ in tutti i punti della piastra si ottiene risolvendo l'equazione di Laplace con le condizioni al contorno descritte sopra, per cui la formulazione matematica del problema è descritta da:

$$\nabla^2 T(x,y) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (19.2.1.1)$$

con le condizioni al contorno (vedi Figura 19.2.1.1a)

$$T(x,0) = T_0 \quad \text{per } 0 \leq x \leq L_x \quad \text{e } y = 0 \quad (19.2.1.2a)$$

$$T(0,y) = T_0 \quad \text{per } x = 0 \quad \text{e } 0 \leq y \leq L_y \quad (19.2.1.2b)$$

$$T(L_x,y) = T_0 \quad \text{per } x = L_x \quad \text{e } 0 \leq y \leq L_y \quad (19.2.1.2c)$$

$$T(x,L_y) = T_1 \quad \text{per } 0 \leq x \leq L_x \quad \text{e } y = L_y \quad (19.2.1.2d)$$

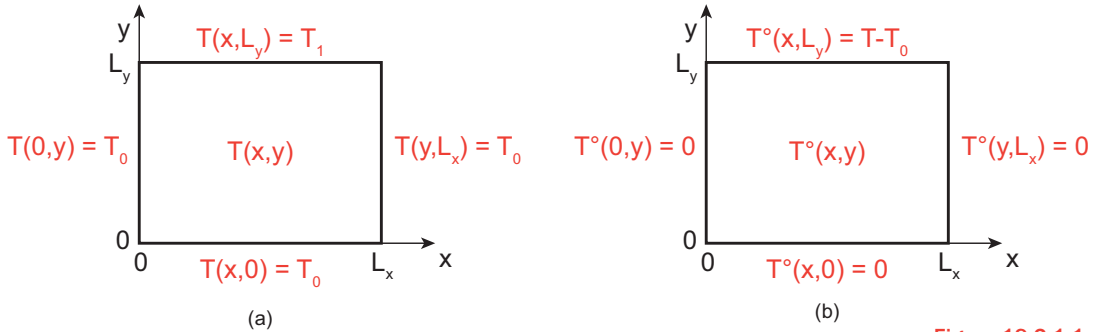


Figura 19.2.1.1

Geometria e condizioni al contorno della piastra piana relative alla distribuzione di temperatura T (a) e a quella T^* riferita alla temperatura T_0 (b).

Si dimostra che il metodo della separazione delle variabili è applicabile a problemi di conduzione termica in regime stazionario bidimensionali quando:

1. l'equazione differenziale è lineare e omogenea;
2. le condizioni al contorno sono lineari;
3. una sola condizione al contorno è non omogenea.

Nel caso in cui si abbia più di una condizione al contorno non omogenea si può scomporre il problema iniziale in più casi, ognuno dei quali abbia una sola condizione al contorno non omogenea. Una volta ottenute le singole soluzioni basterà sommarle per ottenere la soluzione totale, applicando, grazie alla linearità dell'equazione differenziale, il principio di sovrapposizione degli effetti.

Nel presente problema, in cui le prime tre condizioni al contorno sono coincidenti, si può accelerare la soluzione ricorrendo alla tecnica di riferire tutte le temperature alla temperatura nota T_0 .

Allora indicando con l'apice ° la temperatura $T(x,y)$ riferita a T_0 si ha:

$$T^\circ(x,y) = T(x,y) - T_0 \quad (19.2.1.3)$$

e, inoltre, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T^\circ}{\partial x^2} \quad (19.2.1.4a)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T^\circ}{\partial y^2} \quad (19.2.1.4b)$$

Sostituendo le relazioni (19.2.1.4) nella (19.2.1.1) si ottiene

$$\frac{\partial^2 T^\circ}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^\circ}{\partial y^2} = 0 \quad (19.2.1.5)$$

con le condizioni al contorno (vedi Figura 19.2.1.1b)

$$T^\circ(0,y) = 0 \quad \text{per } x = 0 \quad \text{e } 0 \leq y \leq L_y \quad (19.2.1.6a)$$

$$T^\circ(x,0) = 0 \quad \text{per } 0 \leq x \leq L_x \quad \text{e } y = 0 \quad (19.2.1.6b)$$

$$T^\circ(L_x,y) = 0 \quad \text{per } x = L_x \quad \text{e } 0 \leq y \leq L_y \quad (19.2.1.6c)$$

$$T^\circ(x,L_y) = (T_1 - T_0) \quad \text{per } 0 \leq x \leq L_x \quad \text{e } y = L_y \quad (19.2.1.6d)$$

Grazie alla definizione di T° il problema contiene una sola condizione al contorno non omogenea e quindi è possibile applicare il metodo della separazione delle variabili, che consiste nell'ipotizzare che la temperatura T° che risolve l'equazione di Laplace (19.2.1.1) sia esprimibile come prodotto di due funzioni X e Y , la prima delle quali dipende solo dalla variabile spaziale x e la seconda solo dalla variabile spaziale y

$$T^\circ(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (19.2.1.7)$$

Sostituendo la (19.2.1.7) nella (19.2.1.1) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y)]}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [X(x) \cdot Y(y)] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [X(x) \cdot Y(y)] \right\} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) + \frac{\partial Y(y)}{\partial x} X(x) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial X(x)}{\partial y} Y(y) + \frac{\partial Y(y)}{\partial y} X(x) \right] &= 0 \end{aligned}$$

che, essendo $\frac{\partial Y(y)}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial X(x)}{\partial y} = 0$, con ovvi passaggi, diventa

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y) + \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} X(x) = 0 \quad (19.2.1.8)$$

dove, essendo le funzioni $X(x)$ e $Y(y)$ funzioni di una sola variabile si è passati dalle derivate parziali alle derivate totali. Poiché l'equazione (19.2.1.8) è omogenea, si può dividere entrambi i membri per $T^\circ(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ e, semplificando i termini uguali a numeratore e denominatore di ciascun termine, si ottiene

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0$$

da cui

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \quad (19.2.1.9)$$

Essendo il primo termine della (19.2.1.9) dipendente solo da x e il secondo solo da y , affinché l'identità valga per ogni valore di x e di y i due termini devono essere costanti e uguali alla stessa costante, che poniamo uguale a $-\gamma^2$ (detta costante di separazione), per cui si ottengono le due equazioni separate

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\gamma^2 \quad \text{e} \quad - \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\gamma^2$$

ovvero

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \gamma^2 X(x) = 0 \quad (19.2.1.10a)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \gamma^2 Y(y) = 0 \quad (19.2.1.10b)$$

Pertanto, con il metodo della separazione delle variabili si è trasformata un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea alle derivate parziali in due equazioni differenziali del secondo ordine, omogenee, alle derivate totali, il che costituisce una sostanziale semplificazione dal punto di vista matematico.

In Tabella 19.2.1.1 vengono richiamate in forma schematica le metodologie di soluzione di equazioni differenziali del secondo ordine alle derivate totali, omogenee, a coefficienti costanti.

Ipotezziamo che la funzione incognita dell'equazione differenziale dipenda dalla sola variabile ξ . Allora, l'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti a_1, a_2, a_3 ha la forma

$$a_1 \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + a_2 \frac{df(\xi)}{d\xi} + a_3 f(\xi) = 0$$

A tale equazione differenziale può essere associata l'equazione caratteristica

$$a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

A seconda della soluzione dell'equazione caratteristica si distinguono tre casi

	Soluzione dell'equazione caratteristica	Soluzione generale dell'equazione differenziale
Caso 1	Radici reali e distinte: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$f(\xi) = K_3 e^{\lambda_1 \xi} + K_4 e^{\lambda_2 \xi}$
Caso 2	Radici complesse coniugate: $\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$	$f(\xi) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)\xi} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)\xi} =$ $= e^{\alpha \xi} [K_1 \cos(\beta \xi) + K_2 \sin(\beta \xi)]$ con $K_1 = C_1 + C_2$ e $K_2 = C_1 - C_2$
Caso 3	Radici reali e coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$f(\xi) = K_5 e^{\lambda \xi} + K_6 \xi e^{\lambda \xi}$

Tabella 19.2.1.1

Metodologia
risolutiva
di un'equazione
differenziale
del secondo
ordine, omogenea,
alle derivate totali
a coefficienti
costanti.

Utilizzando le indicazioni richiamate nella Tabella 19.2.1.1 possiamo risolvere le equazioni (19.2.1.10).

Per quanto riguarda la prima: $\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \gamma^2 X(x) = 0$ la sua equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \gamma^2 = 0$ ovvero $\lambda^2 = -\gamma^2$, che ha le due radici complesse coniugate $\lambda_1 = i\gamma$ e $\lambda_2 = -i\gamma$ (Caso 2 in Tabella), quindi con parte reale nulla, $\alpha=0$, e parte immaginaria $\beta=\gamma$, per cui la soluzione dell'equazione differenziale (19.2.10a) è

$$X(x) = e^{0 \cdot x} [K_1 \cos(\gamma x) + K_2 \sin(\gamma x)] = K_1 \cos(\gamma x) + K_2 \sin(\gamma x) \quad (19.2.1.11)$$

Considerando la seconda delle equazioni (19.2.1.10) $\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \gamma^2 Y(y) = 0$, la sua equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - \gamma^2 = 0$ ovvero $\lambda^2 = \gamma^2$, che ha le due radici reali distinte $\lambda_1 = \gamma$ e $\lambda_2 = -\gamma$ (Caso 1 in Tabella), per cui la soluzione dell'equazione differenziale (19.2.1.10a) è

$$Y(y) = K_3 e^{\gamma y} + K_4 e^{-\gamma y} \quad (19.2.1.12)$$

Sostituendo le (19.2.1.11) e (19.2.1.12) nella (19.2.1.7) si ottiene

$$T^o(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = [K_1 \cos(\gamma x) + K_2 \sin(\gamma x)] [K_3 e^{\gamma y} + K_4 e^{-\gamma y}] \quad (19.2.1.13)$$

Le costanti K_1, K_2, K_3 e K_4 possono essere determinate utilizzando le condizioni al contorno (19.2.1.6).

Dalla prima condizione al contorno omogenea (19.2.1.6a) si ha

$$T^o(x=0, y) = 0 = [K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0)] [K_3 e^{\gamma y} + K_4 e^{-\gamma y}]$$

da cui, essendo $\cos(0)=1$ e $\sin(0)=0$ si ottiene

$$K_1 [K_3 e^{\gamma y} + K_4 e^{-\gamma y}] = 0$$

che implica $K_1=0$.

Allora la (19.2.1.13) diventa

$$T^\circ(x, y) = K_2 \sin(\gamma x) [K_3 e^{\gamma y} + K_4 e^{-\gamma y}]$$

Utilizzando la seconda condizione al contorno omogenea $T^\circ(x, y=0) = 0$ (19.2.1.6b) si ha $K_2 \sin(\gamma x) [K_3 e^0 + K_4 e^0] = 0$, ovvero $K_2 \sin(\gamma x) [K_3 + K_4] = 0$, che implica $K_2=0$ o $K_3 + K_4=0$.

La costante K_2 non può essere uguale a zero, altrimenti la temperatura sarebbe identicamente nulla in qualunque punto della piastra, il che è ovviamente inaccettabile.

Pertanto si ha $K_3 + K_4=0$ ovvero $K_3=-K_4$ per cui la (19.2.1.13) diventa

$$T^\circ(x, y) = K_2 \sin(\gamma x) K_3 (e^{\gamma y} - e^{-\gamma y})$$

e, ricordando la definizione della funzione **seno iperbolico** $\sinh(\gamma y) = \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2}$ e ponendo $K = 2K_2 K_3$, si ottiene

$$T^\circ(x, y) = K \sin(\gamma x) \sinh(\gamma y)$$

Utilizzando la terza condizione al contorno (19.2.6c) $T^\circ(x = L_x, y) = 0$ si ha

$$K \sin(\gamma L_x) \sinh(\gamma y) = 0$$

Anche in questo caso la costante K non può essere uguale a zero per la ragione analoga a quella vista sopra, per cui deve essere $\sin(\gamma L_x) = 0$ il che è verificato per γ uguale a un multiplo intero di π/L_x : $\gamma = n\pi/L_x$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Va però tenuto presente che se γ fosse uguale a zero, questo implicherebbe $\sinh(\gamma y) = 0$, per cui, anche in questo caso, si avrebbe che la temperatura in ogni punto della piastra sarebbe uguale a zero, risultato inaccettabile. Questo porta a escludere la possibilità $n=0$ per cui si ottiene:

$$T^\circ(x, y) = K \sin(\gamma x) \sinh(\gamma y) = K \sin(n\pi x/L_x) \sinh(n\pi y/L_x) \quad (19.2.1.14)$$

$$\text{con } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Nella relazione (19.2.1.14) le funzioni seno e seno iperbolico, alle quali è associato l'argomento γ , sono le **autofunzioni** dell'equazione differenziale (19.2.1.5).

I particolari valori dell'argomento γ , per i quali esistono autofunzioni non identicamente nulle, sono detti **autovalori**.

La relazione (19.2.1.14) mostra che al variare di n si ha un numero infinito di autovalori e quindi, in corrispondenza di ciascuno di essi, un numero infinito di soluzioni del problema. Poiché l'equazione di Laplace è lineare, anche una combinazione lineare delle singole soluzioni è una soluzione del problema, ovvero

$$T^{\circ}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{sen}(n\pi x/L_x) \operatorname{senh}(n\pi y/L_x) \quad (19.2.1.15)$$

Per determinare le costanti si utilizza la condizione al contorno **non omogenea** (19.2.1.6d) $T^{\circ}(x, y = L_y) = (T_1 - T_0)$ che applicata alla (19.2.1.15) dà

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{sen}(n\pi x/L_x) \operatorname{senh}(n\pi L_y/L_x) = (T_1 - T_0)$$

Moltiplicando ambedue i membri dell'espressione precedente per $\operatorname{sen}(m\pi x/L_x)$ dove m è un numero intero diverso da zero, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{sen}(n\pi x/L_x) \operatorname{sen}(m\pi x/L_x) \operatorname{senh}(n\pi L_y/L_x) = (T_1 - T_0) \operatorname{sen}(m\pi x/L_x)$$

Integrando ambedue i membri tra 0 e L_x , portando le quantità costanti K_n e $\operatorname{senh}(n\pi L_y/L_x)$ fuori dall'integrale e utilizzando la proprietà per cui l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{senh}(n\pi L_y/L_x) \int_0^{L_x} \operatorname{sen}(n\pi x/L_x) \operatorname{sen}(m\pi x/L_x) dx = (T_1 - T_0) \int_0^{L_x} \operatorname{sen}(m\pi x/L_x) dx$$

Ricordando che per le funzioni trigonometriche vale la proprietà di ortogonalità, per cui

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \operatorname{sen}(n\pi x/L_x) \operatorname{sen}(m\pi x/L_x) dx &= 0 \quad \text{per } n \neq m \\ \int_0^{L_x} \operatorname{sen}(n\pi x/L_x) \operatorname{sen}(m\pi x/L_x) dx &\neq 0 \quad \text{per } n = m \end{aligned}$$

assumendo $n = m$, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{senh}(n\pi L_y/L_x) \int_0^{L_x} \operatorname{sen}^2(n\pi x/L_x) dx = (T_1 - T_0) \int_0^{L_x} \operatorname{sen}(n\pi x/L_x) dx \quad (19.2.1.16)$$

I due integrali nell'espressione precedente valgono

$$\int_0^{L_x} \operatorname{sen}^2(n\pi x/L_x) dx = \frac{1}{2} \quad (19.2.1.17)$$

$$\int_0^{L_x} \operatorname{sen}(n\pi x/L_x) dx = \frac{1}{n\pi} [-\cos(n\pi x/L_x)]_0^{L_x} = \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$$

Essendo $\cos(n\pi) = 1$ per n pari e $\cos(n\pi) = -1$ per n dispari si può porre $\cos(n\pi) = (-1)^n$ si ha

$$\int_0^{L_x} \text{sen}(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad (19.2.1.18)$$

Sostituendo la (19.2.1.17) e la (19.2.1.18) nella (19.2.1.16) si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \text{senh}(n\pi L_y/L_x) \frac{1}{2} = (T_1 - T_0) \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

Poiché l'espressione precedente vale per qualunque n , deve essere

$$K_n \text{senh}(n\pi L_y/L_x) \frac{1}{2} = (T_1 - T_0) \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

da cui si ricavano le costanti K^n come

$$K_n = (T_1 - T_0) \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi} \frac{1}{\text{senh}(n\pi L_y/L_x)} \quad (19.2.1.19)$$

Sostituendo la (19.2.1.19) nella (19.2.1.15) otteniamo la relazione che consente di calcolare la temperatura T° in ogni punto della piastra

$$T^\circ(x, y) = (T_1 - T_0) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \frac{1}{\text{senh}(n\pi L_y/L_x)} \right\} \text{sen}(n\pi x/L_x) \text{senh}(n\pi y/L_x)$$

e quindi

$$T(x, y) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1 - (-1)^n]}{n \text{senh}\left(n\pi \frac{L_y}{L_x}\right)} \right\} \text{sen}\left(n\pi \frac{x}{L_x}\right) \text{senh}\left(n\pi \frac{y}{L_y}\right) \quad (19.2.1.20)$$

che consente di calcolare la **temperatura in ogni punto della piastra**.

La soluzione del problema può essere generalizzata utilizzando la relazione seguente

$$T^*(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{L_x} f(x) X(\gamma_n, x) dx}{N Y(\gamma_n, L_y)} X(\gamma_n, x) Y(\gamma_n, y) \quad (19.2.1.21)$$

dove

- L_x e L_y sono le lunghezze dei lati della piastra, x e y le coordinate;
- $T^\circ(x, y)$ è la temperatura riferita alla temperatura T_0 , che dipende dalla variabile x secondo le autofunzioni $X(\gamma_n, x)$ e dalla variabile y secondo le autofunzioni $Y(\gamma_n, y)$;
- γ_n sono gli autovalori:
- $N = \int_0^{L_x} X^2(\gamma_n, x) dx$ è la norma dell'autofunzione $X(\gamma_n, x)$;

- $f(x)$ è una generica funzione di x , che esprime la condizione al contorno non omogenea in y . Per esempio, al fine di eliminare le singolarità della temperatura sugli spigoli identificati da $(x=0, y=L_y)$ e $(x=L_x, y=L_y)$ si può assumere un andamento sinusoidale della temperatura lungo il lato in cui si ha la condizione al contorno non omogenea, del tipo

$$T^o(x, L_y) = T(x, L_y) - T_0 = f(x) = (T_1 - T_0) \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{L_x}\right) \text{ con } 0 \leq x \leq L_x \quad (19.2.1.22)$$

Va ricordato che:

- le autofunzioni $X(\gamma_n, x)$ derivano dalla soluzione dell'equazione differenziale (19.2.1.10a) $\frac{d^2 Y(y^*)}{dy^{*2}} - \gamma^2 Y(y^*) = 0$ e dipendono dalle condizioni al contorno omogenee in x ;
- la norma N dipende dalle condizioni al contorno omogenee in x ;
- le autofunzioni $Y(\gamma_n, y)$ derivano dalla soluzione dell'equazione differenziale (19.2.1.10b) $\frac{d^2 X(x^*)}{dx^{*2}} + \gamma^2 X(x^*) = 0$ e dipendono dalla condizione al contorno omogenea in y ;
- il termine $Y(\gamma_n, L_y)$ deriva dall'applicazione della condizione al contorno **NON** omogenea in y alla temperatura nella sua globalità.

Al fine di facilitare la soluzione del problema in letteratura tecnica sono pubblicate tabelle che forniscono le autofunzioni $X(\gamma_n, x)$, la norma N e gli autovalori γ_n per le diverse combinazioni di condizioni al contorno omogenee che possono essere presenti nella direzione x .

Nella Tabella 19.2.1.2 è riportato un esempio relativo alle tre combinazioni più semplici di condizioni al contorno omogenee su $x=0$ e $x=L_x$, ovvero condizioni al contorno di 1° tipo su entrambi i lati, di 1° tipo su un lato e di 2° sull'altro lato, di 1° tipo su un lato e di 3° sull'altro.

Per le altre 6 combinazioni possibili si rimanda alla letteratura tecnica specialistica.

Tabella 19.2.1.2

Soluzione $X(\gamma_n, x)$,
Norma $N(\gamma_n)$
e autovalori γ_n
dell'equazione
differenziale
 $\frac{d^2 X(x^*)}{dx^{*2}} + \gamma^2 X(x^*) = 0$
in $0 < x < L_x$ per
alcune condizioni
al contorno
omogenee in x .
(Nella condizione
di 3° tipo si è
posto $H = h/\lambda$,
con h coefficiente
convettivo e
 λ conduttività
termica.)

Condizione al contorno in		Autofunzioni	Norma	Autovalori γ_n radici positive di
$x=0$	$x=L_x$	$X(\gamma_n, x)$	$N(\gamma_n)$	
$X=0$	$X=0$	$\operatorname{sen}(\gamma_n x)$	$\frac{L_x}{2}$	$\operatorname{sen}(\gamma_n L_x) = 0$ $\rightarrow \gamma_n = \frac{n\pi}{L_x} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
$X=0$	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\operatorname{sen}(\gamma_n x)$	$\frac{L_x}{2}$	$\cos(\gamma_n L_x) = 0$ $\rightarrow \gamma_n = \frac{n\pi}{L_x} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
$X=0$	$\frac{dX}{dx} + HX = 0$	$\operatorname{sen}(\gamma_n x)$	$\frac{L_x}{2} \frac{(\gamma_n^2 + H^2) + H}{(\gamma_n^2 + H^2)}$	$\gamma_n \cot(\gamma_n L_x) = -H$

Analogamente, la soluzione $Y(\gamma_n, y)$ e il termine $Y(\gamma_n, L_y)$ che si ottengono per le diverse condizioni al contorno omogenee in y sono riportate nella Tabella seguente.

Condizione al contorno omogenea in y	Autofunzioni $Y(\gamma_n, y)$	Termine $Y(\gamma_n, L_y)$
$Y=0$	$\text{sen } h(\gamma_n y)$	$\text{sen } h(\gamma_n L_y)$
$\frac{dY}{dy} = 0$	$\cos(\gamma_n y)$	$\cosh(\gamma_n L_y)$
$\frac{dX}{dx} + HX = 0$	$\frac{\gamma_n \cosh(\gamma_n y) - H \text{sen}(\gamma_n y)}{(\gamma_n + H)}$	$\frac{\gamma_n \cosh(\gamma_n L_y) - H \text{sen}(\gamma_n L_y)}{(\gamma_n + H)}$

Come si è già detto in precedenza il metodo è utilizzabile solo se si ha una sola condizione al contorno non omogenea. In caso contrario, grazie alla linearità dell'equazione di Laplace si può scomporre il problema in tanti sottoproblemi, ognuno con una sola condizione non omogenea e sovrapporre le singole soluzioni sommandole linearmente.

Va inoltre considerato che la soluzione (19.2.1.20) appare complicata da utilizzare perché è costituita da una somma di infiniti termini. In realtà, però, è facile dimostrare che le costanti di integrazione K_n diminuiscono rapidamente all'aumentare dell'indice n , per cui è sufficiente considerare solo alcuni termini e trascurare tutti gli infiniti rimanenti. Questo, ovviamente, introduce un **errore di troncamento**, che è generalmente accettabile per le applicazioni pratiche.

19.2.2

SOLUZIONE CON METODI NUMERICI

I metodi analitici, come già sottolineato nel paragrafo precedente, forniscono soluzioni costituite da funzioni continue esatte, che, però, presentano evidenti difficoltà di gestione, soprattutto nel caso di geometrie e condizioni al contorno complicate.

Per questa ragione si preferisce, in molti casi, utilizzare metodi numerici per risolvere le equazioni differenziali che descrivono processi di trasmissione del calore per conduzione, metodi che ormai sono implementati in numerosi software commerciali.

Tra i numerosi metodi numerici, due tra i più utilizzati sono il metodo degli elementi finiti e il metodo delle differenze finite. Entrambi hanno in comune la caratteristica di suddividere il sistema in cui avviene lo scambio termico in elementi in ognuno dei quali viene identificato un nodo. L'insieme dei nodi collegati fra di loro forma una rete che può anche essere costituita da maglie di forma diverse e che rappresenta in modo discreto il sistema continuo di partenza.

L'equazione differenziale che descrive il problema viene trattata e risolta in modo tale da ottenere il valore della temperatura in ciascun nodo.

Nel metodo degli elementi finiti l'equazione differenziale di partenza viene sostituita su ciascun nodo da equazioni integrali che mediante un processo di integrazione numerica portano a un sistema di equazioni lineari, ognuna delle quali ha come incognita la temperatura del nodo. Un vantaggio notevole del metodo degli elementi finiti è legato alla possibilità di utilizzare reti di nodi in grado di approssimare anche geometrie complesse con buona accuratezza.

Tabella 19.2.1.2

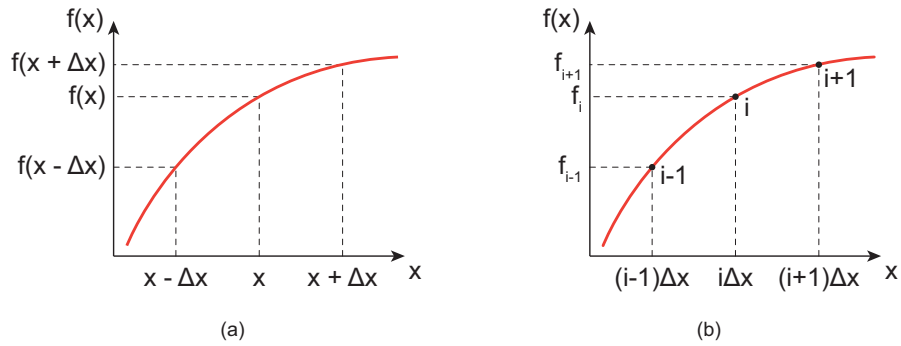
Soluzione $Y(\gamma_n, y)$ dell'equazione differenziale $\frac{d^2 Y(y^*)}{dy^{*2}} - \gamma^2 Y(y^*) = 0$ e il termine $Y(\gamma_n, L_y)$ per le tre condizioni al contorno omogenee in y . (Nella condizione di 3° tipo si è posto $H = h/\lambda$, con h coefficiente convettivo e λ conduttività termica)

Il metodo delle differenze finite è basato sulla trasformazione dell'equazione differenziale che descrive il processo di scambio termico conduttivo, insieme con la condizione iniziale e le condizioni al contorno, in un sistema di tante equazioni algebriche quanti sono i nodi, approssimando le derivate mediante uno sviluppo in serie di Taylor opportunamente troncato.

Questo metodo è meno flessibile del metodo agli elementi finiti perché la rete di nodi è costituita da maglie quadrate o rettangolari che approssimano con difficoltà sistemi di forma complessa, però, tenendo conto della maggiore semplicità concettuale è quello che viene trattato di seguito.

Al fine di esprimere un'equazione differenziale, come l'equazione di Laplace per lo scambio termico conduttivo in regime stazionario, in modo tale da trasformarla in un sistema di equazioni algebriche occorre in primo luogo esprimere le derivate di una funzione in un dato punto mediante uno sviluppo in serie di Taylor.

Figura 19.2.2.1
Discretizzazione della funzione continua $f(x)$ (a) con identificazione dei punti nodali (b).



Sia $f(x)$ una generica funzione della variabile x (vedi Figura 19.2.2.1a) e $(x+\Delta x)$ e $(x-\Delta x)$ siano i punti in prossimità di x , separati da x dalla distanza Δx . Allora, lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni $f(x+\Delta x)$ e $f(x-\Delta x)$ è dato da

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (19.2.2.1a)$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) - \dots \quad (19.2.2.1b)$$

dove $f' = \frac{df(x)}{dx}$, $f'' = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$, $f''' = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ e così via.

Dalle relazioni (19.2.2.1) è possibile ricavare l'espressione della derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^2}{3!} f'''(x) - \dots \quad (19.2.2.2a)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^2}{3!} f'''(x) + \dots \quad (19.2.2.2b)$$

Sottraendo membro a membro le equazioni (19.2.2.1a) e (19.2.2.1b) si ottiene

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3!} f'''(x) + \dots \quad (19.2.2.2c)$$

Se nelle relazioni (19.2.2.2) tronchiamo il secondo termine trascurando le derivate di ordine superiore, possiamo esprimere la derivata prima come

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (19.2.2.3a)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (19.2.2.3b)$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (19.2.2.3c)$$

dove con $O(\Delta x)$ e $O(\Delta x^2)$ si è indicato l'ordine di grandezza del cosiddetto errore di troncamento, ovvero l'imprecisione dovuta all'avere trascurato le derivate di ordine superiore.

Le relazioni (19.2.2.3a) e (19.2.2.3b) vengono dette, rispettivamente, Derivata Prima in Avanti (di seguito indicata con D.P.A.) e Derivata Prima all'Indietro (indicata con D.P.I.) e hanno ambedue un errore di troncamento dell'ordine di grandezza di Δx , mentre la (19.2.2.3c) è detta Derivata Prima Centrale (indicata con D.P.C.) e ha un errore di troncamento dell'ordine di grandezza di Δx^2 .

Se discretizziamo la funzione continua $f(x)$ in tratti, la cui proiezione sull'asse delle ascisse è data da Δx e al centro dei quali sono posti dei punti, detti **nodi**, ognuno dei quali viene identificato con l'indice i (vedi Figura 19.2.2.1b), possiamo introdurre le notazioni schematizzate nella Tabella seguente:

Nodo i	Nodo $i+1$	Nodo $i-1$
$x = i\Delta x$	$x + \Delta x = (i + 1)\Delta x$	$x + \Delta x = (i - 1)\Delta x$
$f(x) = f_i$	$f(x + \Delta x) = f_{i+1}$	$f(x + \Delta x) = f_{i-1}$

Tabella 19.2.2.1

Notazioni utilizzate per discretizzare la funzione $f(x)$ e le sue derivate.

Utilizzando tali notazioni, possiamo esprimere la rappresentazione alle differenze finite della derivata prima $f'_i = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{i\Delta x}$ della funzione $f(x)$ in $x = i\Delta x$ come:

$$\text{D.A. } f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (19.2.2.4a)$$

$$\text{D.I. } f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (19.2.2.4b)$$

$$\text{D.C. } f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (19.2.2.4c)$$

Quindi, l'accuratezza dei risultati sarà tanto migliore quanto più piccolo è l'intervallo Δx , il che, di contro, comporta un aumento del numero di nodi necessario per discretizzare la funzione $f(x)$.

Scegliendo un Δx sufficientemente piccolo è evidente che la Derivata Prima Centrale ha un errore di troncamento minore di quello delle altre due e quindi un'accuratezza maggiore.

Ricordando i seguenti sviluppi in serie di Taylor delle funzioni $f(x+2\Delta x)$ e $f(x-2\Delta x)$:

$$f(x+2\Delta x) = f(x) + 2\Delta x f'(x) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (19.2.2.5a)$$

$$f(x-2\Delta x) = f(x) - 2\Delta x f'(x) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f'''(x) - \dots \quad (19.2.2.5b)$$

Moltiplicando per 2 lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x+\Delta x)$, espresso dalla (19.2.2.1a) e sottraendolo alla prima delle relazioni precedenti, con ovvi passaggi, si ottiene l'espressione della Derivata Seconda in Avanti (D.S.A.):

$$f''(x) = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (19.2.2.6a)$$

Analogamente, moltiplicando per 2 lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x-\Delta x)$, espresso dalla (19.2.2.1b) e sottraendolo alla seconda delle relazioni (19.2.2.5), con ovvi passaggi, si ottiene l'espressione della Derivata Seconda all'Indietro (D.S.I.):

$$f''(x) = \frac{f(x-2\Delta x) - 2f(x-\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (19.2.2.6b)$$

Sommando membro a membro le (19.2.2.6) e sostituendo a $[f(x+2\Delta x) + f(x-2\Delta x)]$ la quantità che si ricava sommando membro a membro le relazioni (19.2.2.5) si ottiene l'espressione della Derivata Seconda Centrale (D.S.C.):

$$f''(x) = \frac{f(x-\Delta x) + f(x+\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (19.2.2.6c)$$

Utilizzando le notazioni riportate in Tabella 19.2.2.1 possiamo rappresentare la

derivata seconda $f'' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{\Delta x}$ della funzione $f(x)$ in $x=i\Delta x$ come:

$$\text{D.S.A. } f''_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (19.2.2.7a)$$

$$\text{D.S.I. } f''_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (19.2.2.7b)$$

$$\text{D.S.C. } f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (19.2.2.7c)$$

APPLICAZIONE DEL METODO NUMERICO ALLE DIFFERENZE FINITE ALLO SCAMBIO TERMICO CONDUTTIVO IN REGIME STAZIONARIO IN UN SISTEMA MONODIMENSIONALE

Come primo esempio applicativo sull'uso del metodo delle differenze finite per la soluzione di problemi di trasmissione del calore consideriamo il caso, già trattato e risolto analiticamente nel paragrafo 16.2.2, di un'aletta a spillo.

In Figura 19.2.2.2 è schematizzata la geometria del sistema, costituito da un'aletta metallica, con conduttività λ costante e uniforme, cilindrica con sezione costante di area $A_{base} = \frac{\pi D^2}{4}$ e perimetro $P = \pi D$, dove D è il diametro. L'aletta ha lunghezza L , tale che sia $D \ll L$. La base dell'aletta è mantenuta a temperatura costante T_0 , mentre la superficie laterale del cilindro scambia calore per convezione termica con un fluido a temperatura T_∞ con coefficiente di scambio termico h_c .

Essendo il diametro $D \ll L$ si può ritenere trascurabile lo scambio termico conduttivo in direzione radiale e considerare, quindi, il flusso di calore monodimensionale in direzione assiale, ovvero lungo l'asse x .

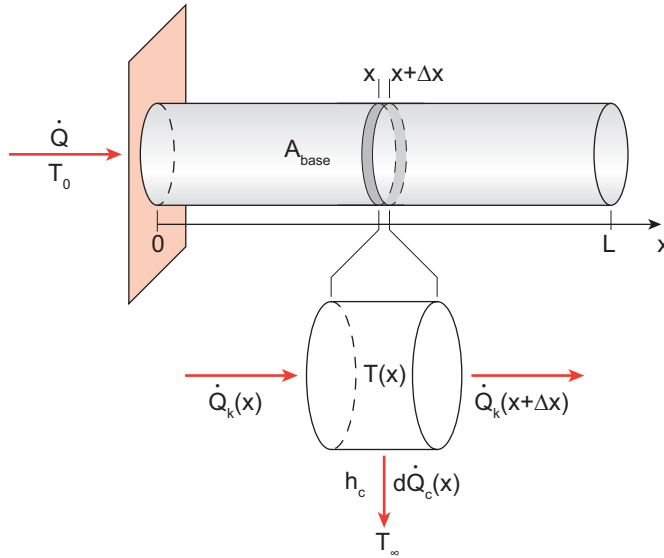


Figura 19.2.2.2

Rappresentazione schematica di un'aletta a spillo, con bilancio termico su un elemento di volume dV .

Nel paragrafo 16.2.2, utilizzando il bilancio di energia in una posizione generica x su un elemento infinitesimo di volume dV tra la potenza termica entrante per conduzione e la potenza termica uscente per conduzione sommata a quella uscente per convezione verso il fluido esterno si è ottenuta l'equazione differenziale che governa il problema $\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{h_c P}{A_{base}} [T(x) - T_\infty] = 0$.

Tale equazione è stata risolta nel paragrafo 16.2.2 utilizzando un metodo analitico nel caso in cui sull'estremità libera in $x=L$ sia considerata una condizione

Tabella 19.2.2.1

Distribuzione di temperatura nell'aletta a spillo per diverse condizioni al contorno sull'estremità libera

al contorno convettiva di 3° tipo, sia una di 2° tipo a flusso costante uguale a zero, ovvero considerando l'estremità adiabatica, sia considerando l'aletta infinitamente lunga, per cui la temperatura dell'estremità è uguale a quella del fluido indisturbato.

In Tabella 19.2.2.1 sono riportate le soluzioni analitiche per un'aletta a spillo con condizione al contorno di temperatura assegnata alla base [$T(x=0)=T_0$] e per diverse condizioni al contorno sulla punta dell'aletta, ovvero in $x=L$.

Caso	Condizione al contorno sulla punta dell'aletta	Soluzione
1	adiabatica	$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$
2	convettiva	$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh[m(L-x)] + \left(\frac{h_c}{m}\right) \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h_c}{m}\right) \sinh(mL)}$
3	$T(x=L) = T_\infty$ (aletta con lunghezza infinita:)	$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-mx}$
Funzioni che appaiono nelle soluzioni Seno iperbolico: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ Coseno iperbolico: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$		
Grandezze che appaiono nelle soluzioni T_0 = temperatura della base T_∞ = temperatura del fluido indisturbato L = lunghezza dell'aletta $m = \frac{h_c P}{A_{base}} = \frac{4h_c}{D}$		

Anche se la condizione al contorno convettiva è quella più aderente alla realtà fisica, in questa applicazione sull'uso della tecnica numerica alle differenze finite assumeremo che lo scambio termico dall'estremità dell'aletta in $x=L$ e il fluido esterno sia trascurabile.

Allora il problema consiste nella soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, a coefficienti costanti

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{h_c P}{A_{base}} [T(x) - T_\infty] = 0 \quad (19.2.2.8a)$$

con le condizioni al contorno

$$T(x=0) = T_0 \quad (19.2.2.8b)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (19.2.2.8c)$$

Indicando con l'apice * l'ascissa e la temperatura adimensionali e ponendo

$$x^* = \frac{x}{L} \quad T^*(x^*) = \frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad m = \sqrt{\frac{h_c P}{A_{base}}}$$

le relazioni (19.2.2.8) diventano in forma adimensionalizzata

$$\frac{d^2 T^*(x^*)}{dx^{*2}} - (mL)^2 T^*(x^*) = 0 \quad (19.2.2.9a)$$

con le condizioni al contorno

$$T^*(x^* = 0) = 1 \quad (19.2.2.9b)$$

$$\left. \frac{dT^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} = 0 \quad (19.2.2.9c)$$

Il primo passo del processo di soluzione dell'equazione differenziale (19.2.2.9a) con le relative condizioni al contorno utilizzando il metodo numerico alle differenze finite, consiste nella discretizzazione del sistema fisico. L'aletta viene suddivisa in elementi aventi ognuno lunghezza, Δx , detta passo della discretizzazione, tranne quelli sulle estremità, in cui verranno imposte le condizioni al contorno, che hanno lunghezza $\frac{\Delta x}{2}$.

Al centro di ciascun elemento viene posto un nodo, identificato con l'indice i , con $0 \leq i \leq N$ (vedi Figura 19.2.2.3), per cui si ha $\Delta x = \frac{L}{N}$.

In pratica, si ipotizza che ogni caratteristica e in particolare la temperatura di tutti i punti di un generico elemento sia uguale a quella del nodo appartenente all'elemento stesso.

Ovviamente l'approssimazione della distribuzione continua di temperatura con un insieme discreto di valori sarà tanto migliore quanto più piccolo è il passo Δx , il che però comporterà un aumento del numero di nodi con conseguente aggravio delle procedure e dei tempi di calcolo.

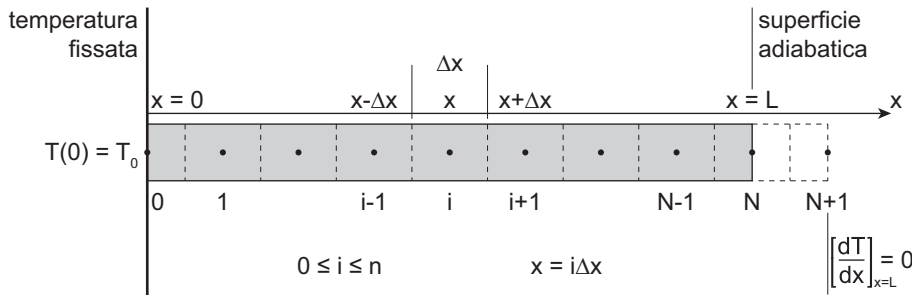


Figura 19.2.2.3
Discretizzazione
dell'aletta a spillo.

Il secondo passo consiste nell'esprimere alle differenze finite le relazioni (19.2.2.9). Per quanto riguarda la derivata seconda della temperatura adimensionale che compare nell'equazione differenziale (19.2.2.9a) conviene utilizzare, per avere un er-

rore di troncamento più basso, la formulazione in termini di derivata centrale espressa dalla relazione (19.2.2.7c)

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Pertanto, in ogni nodo interno per cui si ha $1 \leq i \leq N-1$, l'equazione differenziale del secondo ordine (19.2.2.9a) viene trasformata in un'equazione algebrica

$$\frac{T_{i-1}^* - 2T_i^* + T_{i+1}^*}{\Delta x^{*2}} - (mL)^2 T_i^* = 0 \quad \text{ovvero} \quad T_{i-1}^* - [2 + (mL\Delta x^*)^2] T_i^* + T_{i+1}^* = 0$$

dove $\Delta x^* = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\frac{L}{N}}{L} = \frac{1}{N}$ è il passo di discretizzazione adimensionale.

Poiché la quantità $[2 + (mL\Delta x^*)^2]$ è costituita da grandezze note, geometriche (la lunghezza L , il perimetro P , l'area A_{base} della sezione dell'aletta), termofisiche e fluidodinamiche (la conduttività termica λ del materiale dell'aletta e il coefficiente di scambio termico convettivo h_c) e dal passo di discretizzazione Δx^* , anche esso noto una volta che è stato scelto, possiamo scrivere la relazione precedente come

$$T_{i-1}^* - cT_i^* + T_{i+1}^* = 0 \quad (19.2.2.10)$$

con $c = [2 + (mL\Delta x^*)^2]$, coefficiente costante e noto.

La relazione (19.2.2.10) vale per tutti i nodi interni ovvero per $1 \leq i \leq N-1$, per cui in realtà abbiamo trasformato l'equazione differenziale del secondo ordine (19.2.2.9a) in un sistema di equazioni algebriche, che scritto in forma estesa è dato da:

$$\begin{aligned} T_0^* - cT_1^* + T_2^* &= 0 \quad \text{per il nodo } i = 1 \\ T_1^* - cT_2^* + T_3^* &= 0 \quad \text{per il nodo } i = 2 \\ &\dots \\ T_{i-1}^* - cT_i^* + T_{i+1}^* &= 0 \quad \text{per il generico nodo } i \\ &\dots \\ T_{N-3}^* - cT_{N-2}^* + T_{N-1}^* &= 0 \quad \text{per il nodo } i = T_{N-2}^* \\ T_{N-2}^* - cT_{N-1}^* + T_N^* &= 0 \quad \text{per il nodo } i = T_{N-1}^* \end{aligned}$$

Mancano le equazioni relative ai nodi $i=0$ e $i=N$, ovvero ai nodi posti sulle superfici limite dell'aletta, che, quindi, possono essere ricavate utilizzando le condizioni al contorno (19.2.2.9b) e (19.2.2.9c).

Nel nodo $i=0$ si ha la condizione al contorno di 1° tipo (19.2.2.9b) $T_0^* = 1$, per cui la prima equazione diventa

$$-cT_1^* + T_2^* = -1 \quad \text{per il nodo } i = 1$$

Sul nodo N si ha la condizione al contorno di flusso termico nullo (19.2.2.9c) ovvero l'estremità libera dell'aletta viene supposta adiabatica. La condizione

$\left. \frac{dT^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} = 0$ può essere espressa in termini di differenze finite utilizzando la Derivata Prima Centrale $f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$ che applicata al nodo N diventa $\frac{dT_N^*}{dx^*} = \frac{T_{N+1}^* - T_{N-1}^*}{2\Delta x} = 0$. Possiamo allora considerare un nodo fittizio $N+1$ (vedi Figura 19.2.2.3) che si trovi alla stessa temperatura del nodo $N-1$, in modo tale che il flusso termico sul nodo N sia nullo (condizione di adiabaticità). Allora la condizione al contorno sul nodo N implica $T_{N-1}^* = T_{N+1}^*$. Allora scrivendo l'equazione algebrica per il nodo N come $T_{N-1}^* - cT_N^* + T_{N+1}^* = 0$ e utilizzando il risultato precedente si ha $T_{N-1}^* - cT_N^* + T_{N-1}^* = 0$ ovvero

$$2T_{N-1}^* - cT_N^* = 0 \quad \text{per il nodo } i = N$$

In conclusione, con la formulazione alle differenze finite l'equazione differenziale (19.2.2.9a) è stata trasformata in un sistema di N equazioni algebriche costituito da

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0^* = 1 \quad \text{per il nodo } i = 0 \\ cT_1^* - T_2^* = 1 \quad \text{per il nodo } i = 1 \\ -T_1^* + cT_2^* - T_3^* = 0 \quad \text{per il nodo } i = 2 \\ \dots \\ -T_{i-1}^* + cT_i^* - T_{i+1}^* = 0 \quad \text{per il generico nodo interno } i \\ \dots \\ -T_{N-3}^* + cT_{N-2}^* - T_{N-1}^* = 0 \quad \text{per il nodo } i = N-2 \\ -T_{N-2}^* + cT_{N-1}^* - T_N^* = 0 \quad \text{per il nodo } i = N+1 \\ -2T_{N-1}^* + cT_N^* = 0 \quad \text{per il nodo } i = N \end{array} \right. \quad (19.2.2.11)$$

dove il coefficiente c è costante e dato da $c = [2 + (mL\Delta x^*)^2] = \left[2 + \left(m\frac{1}{N}\right)^2\right]$ con $c = [2 + (mL\Delta x^*)^2] = \left[2 + \left(m\frac{1}{N}\right)^2\right]$.

Risolvendo tale sistema si ricava la temperatura adimensionale T_i^* in ogni nodo da cui è poi possibile ottenere la distribuzione di temperatura dimensionale in ogni nodo

$$T_i = T_\infty + (T_0 - T_\infty)T_i^* \quad \text{per } 0 \leq i \leq N \quad (19.2.2.12)$$

APPLICAZIONE DEL METODO NUMERICO ALLE DIFFERENZE FINITE ALLO SCAMBIO TERMICO CONDUTTIVO IN REGIME STAZIONARIO IN UN SISTEMA MULTIDIMENSIONALE

Per estendere la trattazione sull'uso del metodo delle differenze finite a problemi di trasmissione del calore per conduzione in sistemi multidimensionali possiamo considerare il caso già risolto nel paragrafo 19.2.1 con il metodo analitico della separazione delle variabili.

Consideriamo, quindi, una piastra avente lati L_x e L_y e spessore trascurabile, con tre lati mantenuti a temperatura costante T_0 e il quarto lato a temperatura T_1 (vedi Figura 19.2.2.4a), senza generazione interna e in regime permanente.

Pertanto lo scambio termico conduttivo è regolato dall'equazione di Laplace, che, per il sistema bidimensionale considerato, è data da

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (19.2.2.13)$$

con le condizioni al contorno

$$T(x,0) = T_0 \quad \text{per } 0 \leq x \leq L_x \quad \text{e } y = 0 \quad (19.2.2.14a)$$

$$T(0,y) = T_0 \quad \text{per } x = 0 \quad \text{e } 0 \leq y \leq L_y \quad (19.2.2.14b)$$

$$T(x,L_y) = T_0 \quad \text{per } x = L_x \quad \text{e } 0 \leq y \leq L_y \quad (19.2.2.14c)$$

$$T(x,L_y) = T_1 \quad \text{per } 0 \leq x \leq L_x \quad \text{e } y = L_y \quad (19.2.2.14d)$$

Introducendo le coordinate adimensionali $x^* = \frac{x}{L_x}$, $y^* = \frac{y}{L_y}$, e la temperatura adimensionale $T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$ le relazioni (19.2.2.13) e (19.2.2.14) diventano

$$\frac{\partial^2 T^*(x^*,y^*)}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*(x^*,y^*)}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (19.2.2.15)$$

con le condizioni al contorno (assumendo $L_x = L_y$)

$$T^*(x^*,0) = 0 \quad \text{per } 0 \leq x^* \leq 1 \quad \text{e } y^* = 0 \quad (19.2.2.16a)$$

$$T^*(0,y^*) = 0 \quad \text{per } x^* = 0 \quad \text{e } 0 \leq y^* \leq 1 \quad (19.2.2.16b)$$

$$T^*(1,y^*) = 0 \quad \text{per } x^* = 1 \quad \text{e } 0 \leq y^* \leq 1 \quad (19.2.2.16c)$$

$$T^*(x^*,1) = 1 \quad \text{per } 0 \leq x^* \leq 1 \quad \text{e } y^* = 1 \quad (19.2.2.16d)$$

Per formulare il problema alle differenze finite operiamo la discretizzazione del sistema geometrico suddividendo la lastra in elementi rettangolari di lati Δx e Δy e scegliendo il centro di ogni elemento come punto nodale (Figura 19.2.2.4b). Gli elementi adiacenti ai lati della piastra hanno dimensione pari a metà di quelli interni, in modo che i relativi nodi sono posizionati sui lati e ad essi si applicheranno le condizioni al contorno.

Ogni punto nodale viene caratterizzato con due pedici i,j e, nel sistema di coordinate cartesiane, la posizione di ciascun nodo lungo l'asse x e l'asse y è data, rispettivamente da $x = (i-1)\Delta x$ e $y = (j-1)\Delta y$.

Supponendo che il numero totale di nodi sia N e M nella direzione x e y , rispettivamente, allora le lunghezze dei lati sono esprimibili come $L_x = (M-1)\Delta x$ e $L_y = (M-1)\Delta y$.

Per semplicità consideriamo una piastra quadrata di lati $L_x = L_y = L$ e sottoelementi quadrati per cui si ha $M=N$ e $M=N$ e $\Delta x = \Delta y = \frac{L}{(N-1)}$.

Le derivate seconde presenti nell'equazione (19.2.2.15) possono essere espresse come derivate centrali alle differenze finite

$$\frac{\partial^2 T^*(x^*, y^*)}{\partial x^{*2}} = \frac{T_{i-1,j}^* - 2T_{i,j}^* + T_{i+1,j}^*}{\Delta x^{*2}}$$

$$\frac{\partial^2 T^*(x^*, y^*)}{\partial y^{*2}} = \frac{T_{i,j-1}^* - 2T_{i,j}^* + T_{i,j+1}^*}{\Delta y^{*2}}$$

Naturalmente in forma adimensionalizzata si ha

$$\Delta x^* = \frac{1}{N-1} \quad e \quad \Delta y^* = \frac{1}{M-1}.$$

Allora l'equazione di Laplace (19.2.2.15) può essere scritta per il nodo i,j come

$$\frac{T_{i-1,j}^* - 2T_{i,j}^* + T_{i+1,j}^*}{\Delta x^{*2}} + \frac{T_{i,j-1}^* - 2T_{i,j}^* + T_{i,j+1}^*}{\Delta y^{*2}} = 0$$

e, ricordando che abbiamo assunto $N=M$ e, quindi, $\Delta x^* = \Delta y^*$ si ha

$$T_{i-1,j}^* + T_{i,j-1}^* + T_{i+1,j}^* + T_{i,j+1}^* - 4T_{i,j}^* = 0 \quad (19.2.2.17)$$

L'equazione (19.2.2.17) in realtà costituisce un sistema di $(N-1) \times (N-1)$ equazioni che esprimono lo scambio termico che avviene in tutti i nodi interni, ovvero per $2 \leq i \leq N-1$ e $2 \leq j \leq N-1$.

Per i nodi posti sui lati della piastra occorre applicare le condizioni al contorno (19.2.2.16), che possono essere espresse come:

$$T_{1,j}^* = 0 \quad \text{per } i = 1 \quad e \quad 1 \leq j \leq N \quad (19.2.2.18a)$$

$$T_{N,j}^* = 0 \quad \text{per } i = N \quad e \quad 1 \leq j \leq N \quad (19.2.2.18b)$$

$$T_{i,1}^* = 0 \quad \text{per } 1 \leq i \leq N \quad e \quad j = 1 \quad (19.2.2.18c)$$

$$T_{i,N}^* = 1 \quad \text{per } 1 < i < N \quad e \quad j = N \quad (19.2.2.18d)$$

Le relazioni (19.2.2.17) e (19.2.2.18) rappresentano un sistema di $N \times N$ equazioni algebriche, risolvendo il quale con gli usuali metodi dell'algebra lineare, si determina la temperatura adimensionale $T_{i,j}^*$ e, quindi, la temperatura dimensionale $T_{i,j} = T_0 + T_{i,j}^*(T_1 - T_0)$ in ogni nodo.

Una volta nota la distribuzione di temperatura è possibile calcolare la potenza termica trasmessa per conduzione utilizzando, al solito, il postulato di Fourier.

L'esempio discusso sopra è stato svolto ipotizzando che in tutti i lati della piastra si abbiano condizioni al contorno di 1° tipo, ovvero a temperatura fissata. Nel caso si abbiano condizioni diverse basterà adattare al caso bidimensionale le tecniche applicate in precedenza al caso della barra monodimensionale.

APPENDICE AL PARAGRAFO 19.2.2

CENNI AI METODI DI SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE LINEARI

Nella trattazione precedente si è visto che il metodo alle differenze finite consente di trasformare l'equazione differenziale che descrive il processo di scambio termico conduttivo in un sistema di tante equazioni algebriche quanti sono i nodi.

Per la soluzione di sistemi di equazioni algebriche lineari esistono numerosi metodi, che, in linea generale, possono essere suddivisi in:

- metodi diretti, come per esempio il metodo dell'eliminazione di Gauss, il metodo dell'eliminazione di Gauss-Jordan, che in definitiva sono riconducibili al più generale metodo dell'inversione della matrice dei coefficienti;
- metodi iterativi, come per esempio il metodo di Jacobi, il metodo di Gauss-Seidel e i metodi accelerati a rilassamento.

Di seguito vengono dati solo alcuni cenni estremamente sintetici dei metodi citati, rinviando a testi specifici di analisi numerica la trattazione dettagliata.

A titolo di esempio si fa riferimento, per semplicità, a un sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite del tipo

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = v_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = v_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = v_3$$

dove sono indicati con x_i le incognite, con a_{ij} i coefficienti delle incognite e con v_i i termini noti, in ciascuna equazione i -esima.

In forma matriciale il sistema di equazioni può essere espresso in forma compatta come

$$A \cdot X = V \quad (\text{A.1})$$

dove A è la matrice dei coefficienti, X il vettore delle incognite e V il vettore dei termini noti

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad V \equiv \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

I **metodi iterativi** sono basati su procedure per cui alle incognite del sistema di equazioni vengono assegnati valori iniziali arbitrari ((x_i^1)) che vengono sostituiti per ottenere nuovi valori, che a loro volta vengono sostituiti iterativamente. Il procedimento prosegue fino a quando converge, cioè fino a quando la differenza tra il valore di ciascuna incognita ((x_i^{p+1})) all'iterazione $p+1$ differisce dal valore ((x_i^p)) all'iterazione precedente di una quantità prefissata ϵ arbitrariamente piccola

$$|x_i^{p+1} - x_i^p| < \epsilon \quad \text{per } \forall x_i$$

Il metodo di Jacobi è a convergenza lenta. Il metodo di Gauss-Seidel consente di accelerare la convergenza utilizzando per il calcolo delle x_i^{p+1} i valori x_{i-1}^{p+1} già ottenuti.

Questo comporta un duplice vantaggio sia perché, a parità di ϵ , converge con un minor numero di iterazioni, sia in termini di occupazione di memoria perché anziché utilizzare due vettori delle incognite è sufficiente utilizzarne uno solo che viene continuamente aggiornato.

Un ulteriore miglioramento nella velocità di convergenza si può ottenere se al posto dei valori x_i^p dell'iterazione precedente si utilizza un valore estrapolato $x_{i,e}^p$, ottenuto moltiplicando per un parametro (detto di rilassamento) ω la differenza tra i valori all'iterazione $p+1$ con quelli all'iterazione p calcolati con Gauss-Jordan. Si dimostra che il numero di iterazioni dipende dal parametro di rilassamento, generalmente compreso tra 0 e 2, che ha un valore ottimale che dipende a sua volta dal particolare problema considerato.

I metodi diretti dell'eliminazione di Gauss e quello di Gauss-Jordan sono basati sulla manipolazione delle equazioni del sistema in modo tale che al termine della procedura nell'ultima equazione tutti i coefficienti che moltiplicano tutte le incognite tranne l'ultima vengono annullati. In questo modo risulta banale calcolare l'ultima incognita e poi, per sostituzione all'indietro calcolare tutte le altre.

Per esempio, possiamo applicare il metodo al sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= v_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= v_3 \end{aligned}$$

Come primo passo si sostituisce la seconda equazione con la somma della seconda equazione con la prima moltiplicata per $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ e la terza equazione con la somma della terza equazione con la prima moltiplicata per $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$. Si ottiene

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= v_1 \\ 0 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= v'_2 \\ 0 + a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= v'_3 \end{aligned}$$

dove

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \quad a'_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \quad v'_2 = v_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}v_1$$

e

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} \quad a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} \quad v'_3 = v_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}v_1$$

Il secondo passo consiste nel sostituire la terza equazione con la somma della terza equazione con la seconda moltiplicata per $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$. Si ottiene

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= v_1 \\
 0 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= v'_2 \\
 0 + 0 + a''_{33}x_3 &= v''_3
 \end{aligned}$$

dove

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{23} \quad v''_3 = v'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}v'_2$$

A questo punto si può facilmente risolvere il sistema ricavando x_3 dall'ultima equazione e le altre incognite mediante il processo di sostituzione all'indietro.

Un miglioramento, soprattutto per quanto riguarda la velocità del processo di soluzione, è costituito dal metodo dell'eliminazione di Gauss-Jordan. Non si danno qui i particolari del metodo che comunque è basato su un algoritmo di calcolo, simile a quello del metodo di Gauss, che consente di ottenere contemporaneamente il processo di normalizzazione delle equazioni, in cui i coefficienti diagonali vengono resi uguali a uno, e di riduzione, in cui gli elementi fuori diagonale vengono resi uguali a zero.

In realtà questi metodi realizzano un processo di soluzione basato sull'inversione della matrice dei coefficienti.

Riprendendo la relazione (A.1) che esprime il problema in forma matriciale si ha $A \cdot X = V$. Moltiplicando ambedue i membri per la matrice A^{-1} , inversa della A , si ha $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot V$ da cui

$$X = A^{-1} \cdot V$$

dove la matrice A^{-1} è definita come la matrice per cui si ha $A^{-1} \cdot A = I$ dove I è la matrice identità

$$I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Condizione necessaria per l'uso del metodo della matrice inversa è che il determinante della matrice dei coefficienti A sia diverso da zero: $\det(A) \neq 0$.

Se tale condizione è verificata basterà moltiplicare riga per colonna la matrice inversa di quella dei coefficienti con il vettore dei termini noti per ottenere il vettore delle soluzioni.

Il metodo quindi è molto efficace, veloce e semplice da applicare, tenendo anche conto che con gli attuali sistemi di calcolo è facile effettuare in automatico l'inversione di una matrice, anche mediante un semplice foglio di calcolo elettronico.

Esempio A.1

Risolvere il seguente sistema di tre equazioni algebriche lineari nelle tre incognite x_1, x_2 e x_3

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Analisi

Esprimiamo il sistema di equazioni in forma matriciale come $A \cdot X = V$ dove:

- la matrice dei coefficienti è $A \equiv \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
- il vettore delle incognite è $X \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
- il vettore dei termini noti è $V \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Soluzione

Per la soluzione del problema con il metodo dell'inversione della matrice dei coefficienti utilizziamo il foglio elettronico Excel di Microsoft.

In primo luogo, verifichiamo se il metodo è applicabile, calcolando il determinante della matrice A dei coefficienti. Usando l'istruzione "`=MATR.DETERM(matrice)`" si ottiene $\det(A) = 21 \neq 0$ per cui il metodo è utilizzabile.

Determiniamo, quindi, la matrice inversa di A usando l'istruzione "`=MATR.INVERSA(matrice)`". Si ottiene

$$A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 0,381 & 0,143 & 0,048 \\ 0,143 & 0,428 & 0,143 \\ 0,047 & 0,143 & 0,381 \end{pmatrix}$$

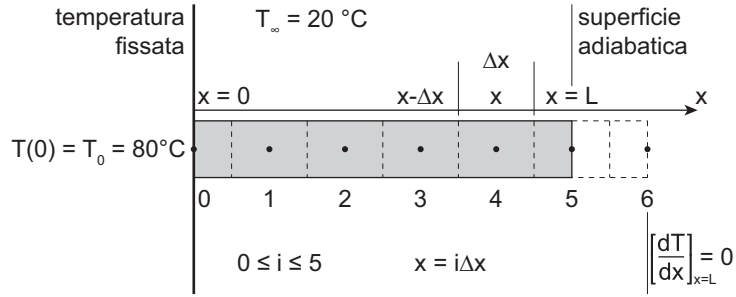
Il vettore delle soluzioni si determina moltiplicando la matrice inversa dei coefficienti per il vettore dei termini noti, con l'istruzione Excel "`=MATR.PRODOTTO(matrice1; matrice2)`" ottenendo

$$X \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot V = \begin{pmatrix} 0,381 & 0,143 & 0,047 \\ 0,143 & 0,428 & 0,143 \\ 0,047 & 0,143 & 0,381 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,381 \\ 0,143 \\ 0,047 \end{bmatrix}$$

Esempio A.2

Un'aletta a spillo, in lega di alluminio con $\lambda = 150 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, cilindrica a sezione costante, avente diametro $D = 4 \text{ mm}$, lunghezza $L = 2 \text{ cm}$, la cui base è mantenuta alla temperatura $T_0 = 80^\circ\text{C}$, scambia calore per convezione con un fluido a temperatura $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, con coefficiente di scambio termico convettivo $h_c = 10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Trascurando la dissipazione di calore dalla punta dell'aletta determinare con il metodo delle differenze finite la distribuzione di temperatura lungo l'aletta.

Figura 19.2.2.5
Discretizzazione
dell'aletta a spillo
con $N=5$.



Analisi

Il sistema di equazioni da risolvere è dato dalle (19.2.2.11a) con la (19.2.2.11b) che esprime la condizione al contorno in $x=L$

$$\begin{aligned} cT_1^* - T_2^* &= 1 & \text{per il nodo } i=1 \\ -T_1^* + cT_2^* - T_3^* &= 0 & \text{per il nodo } i=2 \\ -T_2^* + cT_3^* - T_4^* &= 0 & \text{per il nodo } i=3 \\ -T_3^* + cT_4^* - T_5^* &= 0 & \text{per il nodo } i=4 \\ -2T_4^* + cT_5^* &= 0 & \text{per il nodo } i=5 \end{aligned}$$

dove il coefficiente c è costante, dato da $c = \left[2 + (mL)^2\right] = \left[2 + \left(mL \frac{1}{N}\right)^2\right]$ e

$$m = \sqrt{\frac{h_c P}{A_{\text{base}}}} = \sqrt{\frac{h_c \pi D}{\frac{\pi D^2}{4}}} = \sqrt{\frac{4h_c}{D}}$$

Risolviendo tale sistema si ricava la temperatura adimensionale T_i^* in ogni nodo da cui è poi possibile ottenere la distribuzione di temperatura dimensionale in ogni nodo

$$T_i = T_\infty + (T_0 - T_\infty) T_i^* \quad \text{per } 0 \leq i \leq 5$$

Per la soluzione del sistema di equazioni algebriche lo esprimiamo in forma matriciale, come

$$A \cdot X = V$$

La matrice dei coefficienti è $A \equiv$

$$\begin{pmatrix} c & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & c \end{pmatrix}$$

il vettore delle incognite è $X \equiv \begin{bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_3^* \\ T_4^* \\ T_5^* \end{bmatrix}$ e il vettore dei termini noti è $V \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dopo avere verificato che il determinante della matrice A sia diverso da zero, si può utilizzare il metodo dell'inversione della matrice dei coefficienti

$$V = A^{-1} \cdot X$$

Per la soluzione del problema utilizziamo il foglio elettronico Excel di Microsoft, con, in particolare, le istruzioni per il calcolo matriciale già indicate nell'Esempio A1.

Soluzione

In primo luogo, calcoliamo il parametro m e il coefficiente c :

$$m = \sqrt{\frac{h_c P}{A_{base}}} = \sqrt{\frac{4h_c}{D}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \text{ [Wm}^{-2}\text{K}^{-1}]}{150 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}] \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}}} = \sqrt{66.67} = 8,16 \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

$$c = \left[2 + \left(mL \frac{1}{N} \right)^2 \right] = \left[2 + \left(8,16 \text{ [m}^{-1}\text{]} \cdot 0,02 \text{ [m]} \frac{1}{5} \right)^2 \right] = [2 + (0,0326)^2] = 2,001$$

Allora la matrice dei coefficienti è $A \equiv \begin{pmatrix} 2,001 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2,001 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2,001 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2,001 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2,001 \end{pmatrix}$

Quindi, verifichiamo se il metodo dell'inversione della matrice è applicabile, calcolando il determinante della matrice A dei coefficienti. Si ha $\det(A) = 2,03 \neq 0$ per cui il metodo è utilizzabile.

Determiniamo, quindi, la matrice inversa di A otteniamo

$$A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 0,995 & 0,992 & 0,989 & 0,987 & 0,493 \\ 0,992 & 1,984 & 1,979 & 1,976 & 0,987 \\ 0,989 & 1,979 & 2,971 & 2,966 & 1,482 \\ 0,987 & 1,976 & 2,966 & 3,960 & 1,979 \\ 0,987 & 1,975 & 2,965 & 3,958 & 2,478 \end{pmatrix}$$

Il vettore delle soluzioni si determina moltiplicando la matrice inversa dei coefficienti per il vettore dei termini noti

$$X \equiv \begin{bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_3^* \\ T_4^* \\ T_5^* \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot V = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,992 & 0,989 & 0,987 & 0,493 \\ 0,992 & 1,984 & 1,979 & 1,976 & 0,987 \\ 0,989 & 1,979 & 2,971 & 2,966 & 1,482 \\ 0,987 & 1,976 & 2,966 & 3,960 & 1,979 \\ 0,987 & 1,975 & 2,965 & 3,958 & 2,478 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,995 \\ 0,992 \\ 0,989 \\ 0,987 \\ 0,987 \end{bmatrix}$$

Tabella A1
Temperatura
adimensionale in
ogni nodo.

Nodo i		
0	0,0	1,000
1	0,2	0,995
2	0,4	0,992
3	0,6	0,989
4	0,8	0,987
5	1,0	0,987

Infine, utilizzando le definizioni $x^* = \frac{x}{L}$ e $T^*(x^*) = \frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ si ricava la temperatura dimensionale in ogni nodo

Tabella A2
Temperatura
dimensionale in
ogni nodo.

Nodo i	x_i [m]	T_i [°C]
0	0,000	80,00
1	0,004	79,71
2	0,008	79,49
3	0,012	79,34
4	0,016	79,24
5	0,020	79,21

Discussione

La distribuzione di temperatura lungo l'aletta si può calcolare usando le soluzioni analitiche riportate in Tabella 19.2.2.1. Per la condizione al contorno adiabatica sull'estremità libera la soluzione analitica è data da

$$T_i = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh[m(L - x_i)]}{\cosh(mL)}$$

e nella Tabella A3 è riportata la temperatura calcolata con tale relazione per i valori della coordinata x di ogni nodo:

Tabella A3
Temperatura
dimensionale
calcolata in ogni
nodo con la
soluzione analitica.

Nodo i	x_i [m]	$T_i = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh[m(L - x_i)]}{\cosh(mL)}$ [°C]
0	0,000	80,00
1	0,004	79,71
2	0,008	79,49
3	0,012	79,34
4	0,016	79,24
5	0,020	79,21

Risulta del tutto evidente che, nonostante si sia usata una discretizzazione con pochi elementi nodali, i valori calcolati con il metodo delle differenze finite coincidono con quelli ottenuti con la soluzione analitica.

19.2.3

SOLUZIONE APPROSSIMATA CON IL METODO DEL FATTORE DI FORMA

I metodi analitici e numerici consentono di risolvere problemi di conduzione del calore in regime stazionario complessi sia dal punto di vista geometrico che matematico.

Le soluzioni note possono essere utilizzate per derivare il metodo risolutivo semplificato già introdotto nel paragrafo 13.4, detto **metodo del fattore di forma**, che consente di calcolare direttamente la potenza termica \dot{Q}_k scambiata per conduzione mediante la formula

$$\dot{Q}_k = S_\lambda \lambda \Delta T \quad (19.2.3.1)$$

dove

- S_λ , in $[m]$, è il fattore di forma per conduzione termica, che ha le dimensioni di una lunghezza e dipende soltanto da parametri geometrici del sistema in cui avviene il processo di trasporto di calore;
- λ , in $[Wm^{-1}K^{-1}]$ è la conduttività termica del mezzo;
- ΔT , in $[K]$, è la differenza di temperatura che provoca il flusso di calore.

Le condizioni di utilizzabilità del metodo sono

1. Flusso stazionario;
2. Mezzo omogeneo, con conduttività termica uniforme e indipendente dalla temperatura;
3. Assenza di generazione interna;
4. Superfici tra le quali si ha il flusso termico isoterme con differenza di temperatura ΔT tra di loro.

Ovviamente, il metodo è utilizzabile per le configurazioni per le quali è nota la soluzione dell'equazione di Laplace per la conduzione termica. Per molte di queste configurazioni i fattori di forma S_λ sono reperibili in letteratura tecnica e alcuni casi di particolare interesse ingegneristico sono riportati nel paragrafo 13.4.

19.3

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA CONDUZIONE TERMICA IN REGIME VARIABILE NEL TEMPO

Nel paragrafo 16.4 è stata evidenziata l'importanza che riveste nelle applicazioni ingegneristiche l'analisi della trasmissione del calore in regime transitorio ovvero in situazioni in cui la distribuzione di temperatura e il flusso termico variano nel tempo

Nel caso di trasmissione del calore per conduzione termica in un mezzo solido isotropo e omogeneo è possibile ricavare la distribuzione di temperatura risolvendo l'equazione fondamentale della conduzione (19.1.8)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c} \dot{Q}_{gen}$$

che, in assenza di generazione interna di calore, si riduce all'equazione di Fourier (19.1.9)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

dove

- $\alpha = \frac{1}{\rho c}$ è la diffusività termica del mezzo;
- $\nabla^2 T$ è il Laplaciano della temperatura.

Nel paragrafo 16.4 il problema generale è stato affrontato in modo essenzialmente qualitativo, mentre in modo analitico è stato risolto il caso particolare di sistemi cosiddetti “a parametri concentrati, ovvero corpi solidi che scambiano calore con un fluido esterno, nei quali la resistenza conduttiva sia praticamente trascurabile rispetto a quella convettiva.

Si è visto che tale ipotesi semplificativa è applicabile con buona approssimazione quando è verificata la condizione $Bi \ll 1$ dove Bi è il numero adimensionale di Biot del sistema, definito come

$$Bi = \frac{h_c L_{caratt}}{\lambda}$$

dove

- h_c è il coefficiente di scambio termico convettivo, in $[W m^{-2} K^{-1}]$, con cui la superficie del sistema scambia calore per convezione con un fluido esterno;
- $L_{caratt} = V / A$ è la lunghezza caratteristica del sistema, in $[m]$, calcolabile come rapporto tra volume e superficie esterna del sistema;
- λ è la conduttività termica del mezzo, $[W m^{-1} K^{-1}]$.

Se tale condizione è soddisfatta si può ritenere che la temperatura all'interno del sistema sia a ogni istante di tempo uniforme e uguale a quella della superficie esterna. Allora l'andamento della temperatura è quello tipico di un circuito RC termico ed è dato dall'equazione (16.140) o (16.141), nel caso, rispettivamente, che la temperatura del fluido esterno sia minore o maggiore della temperatura del corpo solido.

Nel presente paragrafo verrà affrontato il problema generale di sistemi in cui non è applicabile la condizione descritta sopra, per cui l'andamento della temperatura nello spazio e nel tempo deve essere ricavata risolvendo le equazioni differenziali della conduzione in regime transitorio con il metodo analitico della separazione delle variabili o con il metodo numerico alle differenze finite.

19.3.1

SOLUZIONE CON METODI ANALITICI

Come esempio di applicazione del metodo analitico della separazione delle variabili a un problema di trasmissione del calore per conduzione in regime transitorio consideriamo il caso di una lastra piana (Figura 19.3.1.1) avente spessore $2L$ nella direzione x e dimensioni nelle direzioni y e z molto maggiori di $2L$, per cui si può considerare la lastra praticamente indefinita, con effetti di bordo trascurabili, e la

distribuzione di temperatura $T(x,t)$ dipendente oltre che dal tempo dalla sola coordinata spaziale x .

La lastra si trova inizialmente a temperatura $T(x,t=0)=T_i$ uniforme, mentre le sue facce sono mantenute alla temperatura costante e uniforme $T(x=0,t)=T(x=2L,t)=T_s$ (condizioni al contorno di 1° tipo).

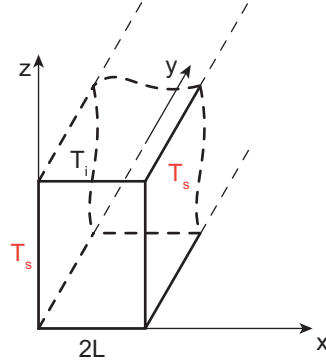


Figura 19.3.1.1

Piastra piana indefinita nelle direzioni y e z , con spessore $2L$ in direzione x e con temperatura iniziale T_i e le due facce perpendicolari all'asse x a temperatura T_s .

Se nella lastra non c'è generazione interna di calore e il mezzo materiale è omogeneo, isotropo con proprietà costanti, la distribuzione di temperatura si ricava risolvendo l'equazione di Fourier per conduzione termica monodimensionale lungo l'asse x

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (19.3.1.1)$$

con la condizione iniziale

$$T(x, 0) = T_i \quad \text{per} \quad 0 < x < 2L \quad \text{e} \quad t=0 \quad (19.3.1.2)$$

e le condizioni al contorno

$$T(0, t) = T_s \quad \text{per} \quad x=0 \quad \text{e} \quad t>0 \quad (19.3.1.3a)$$

$$T(2L, t) = T_i \quad \text{per} \quad x=2L \quad \text{e} \quad t>0 \quad (19.3.1.3b)$$

Anche in questo caso, definiamo la temperatura $T^\circ = T(x,t) - T_s$ per cui riferiamo tutte le temperature alla temperatura costante e uniforme delle facce della lastra. Allora la formulazione matematica del problema diventa

$$\frac{\partial T^\circ(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T^\circ(x,t)}{\partial x^2} \quad (19.3.1.4)$$

con la condizione iniziale

$$T^\circ(x, 0) = T_i^\circ = T_i - T_s \quad \text{per} \quad 0 < x < 2L \quad (19.3.1.5)$$

e le condizioni al contorno,

$$T^\circ(0, t) = 0 \quad \text{per } x=0 \quad \text{e } t>0 \quad (19.3.1.6a)$$

$$T^\circ(2L, t) = 0 \quad \text{per } x=2L \quad \text{e } t>0 \quad (19.3.1.6b)$$

Essendo le condizioni al contorno omogenee, è possibile applicare il metodo della separazione delle variabili. Allora supponiamo che sia

$$T^\circ(x, t) = X(x) \cdot \Theta(t) \quad (19.3.1.7)$$

dove $X(x)$ e $\Theta(t)$ sono funzioni che dipendono, rispettivamente, soltanto da x e da t .

Sostituendo nella (19.3.1.4) si ottiene $X(x) \frac{d\Theta(t)}{dt} = \alpha \Theta(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$, da cui, separando le variabili

$$\frac{1}{\alpha \Theta(t)} \frac{d\Theta(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\gamma^2$$

in cui ogni membro, essendo funzione di una sola variabile, devono essere costanti e uguali a una stessa costante indicata con $-\gamma^2$. Si ottengono allora due equazioni differenziali alle derivate ordinarie

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} + \alpha \gamma^2 \Theta(t) = 0 \quad (19.3.1.8a)$$

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \gamma^2 X(x) = 0 \quad (19.3.1.8b)$$

che hanno le seguenti soluzioni

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= C_1 e^{-\alpha \gamma^2 t} \\ X(x) &= C_2 \text{sen}(\gamma x) + C_3 \cos(\gamma x) \end{aligned}$$

dove C_1 , C_2 e C_3 sono costanti di integrazione. Utilizzando la (19.3.1.7) si ottiene la soluzione generale

$$T^\circ(x, t) = e^{-\alpha \gamma^2 t} [C_4 \text{sen}(\gamma x) + C_5 \cos(\gamma x)] \quad (19.3.1.9)$$

dove le costanti C_4 e C_5 possono essere ricavate utilizzando le condizioni al contorno.

- Applicando la condizione (19.3.1.6a) si ottiene

$$T^\circ(x=0, t) = e^{-\alpha \gamma^2 t} [C_4 \text{sen}(0) + C_5 \cos(0)] = e^{-\alpha \gamma^2 t} C_5 = 0$$

da cui si ottiene $C_5 = 0$.

- Applicando la condizione (19.3.1.6b) e considerando che è $C_5 = 0$ si ottiene

$$T^\circ(x = 2L, t) = e^{-\alpha\gamma^2 t} [C_4 \text{sen}(\gamma 2L)] = 0$$

e, non potendo essere anche $C_4 = 0$ perché altrimenti si otterrebbe il risultato ovviamente inaccettabile di temperatura identicamente nulla, deve essere

$$\text{sen}(C_2 \text{ e } C_3 2L) = 0 \quad \text{da cui} \quad \gamma 2L = n\pi \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

ovvero si hanno infiniti valori di γ che soddisfano la condizione al contorno in $x = 2L$

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Per la linearità dell'equazione (19.3.1.1), la soluzione generale è una combinazione lineare delle singole soluzioni che si ottengono per ogni valore di

$$T^\circ(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 \alpha t} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) \quad (19.3.1.10)$$

Applicando la condizione iniziale (19.3.1.5) si ha

$$T^\circ(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) = T_{iniz}^\circ$$

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 19.2.1, moltiplicando ambedue i membri dell'espressione precedente per $\text{sen}(m\pi x/L)$, dove $m = 1, 2, 3, \dots$, integrando ambedue i membri tra 0 e 1, portando le quantità costanti C_n fuori dall'integrale, utilizzando la proprietà per cui l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali, ricordando che per le funzioni trigonometriche vale la proprietà di ortogonalità, assumendo $n = m$, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{2L} \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) dx = T_{iniz}^\circ \int_0^{2L} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) dx \quad (19.3.1.11)$$

I due integrali nell'espressione precedente valgono

$$\int_0^{2L} \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) dx = \frac{1}{2} \quad (19.3.1.12)$$

$$\int_0^{2L} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) dx = \frac{1}{n\pi} [-\cos\left(\frac{n\pi}{2L} x\right)]_0^{2L} = \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$$

Essendo $\cos(n\pi) = 1$ per n pari e $\cos(n\pi) = -1$ per n dispari si può porre $\cos(n\pi) = (-1)^n$ si ha

$$\int_0^{2L} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) dx = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad (19.3.1.13)$$

Sostituendo la (19.3.1.12) e la (19.3.1.13) nella (19.3.1.11) si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{2} = T_i^{\circ} \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

Poiché l'espressione precedente vale per qualunque n , deve essere

$$C_n \frac{1}{2} = T_i^{\circ} \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

da cui si ricavano le costanti C_n come

$$C_n = T_i^{\circ} \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi} \quad (19.3.1.14)$$

Sostituendo la (19.2.1.14) nella (19.2.1.10) otteniamo la relazione che consente di calcolare la temperatura T° in ogni punto della piastra

$$T^{\circ}(x, y) = T_i^{\circ} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 y} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2L} x\right)$$

e quindi

$$T(x, y) = T_i + (T_i - T_s) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 y} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) \quad (19.3.1.15)$$

Il presente risultato può essere facilmente generalizzato utilizzando come condizione iniziale una temperatura $f(x)$ al posto della temperatura uniforme T_i e con opportune modifiche, che comportano maggiori difficoltà dal punto di vista matematico, possono essere applicate condizioni al contorno di 2° o 3° tipo.

19.3.2

SOLUZIONE CON METODI NUMERICI

Il metodo numerico delle differenze finite può essere utilizzato anche per risolvere equazioni differenziali che descrivono matematicamente problemi di trasmissione del calore in regime variabile nel tempo.

In particolare lo utilizzeremo per la soluzione dell'equazione di Fourier in un sistema in cui non è verificata la condizione $Bi \ll 1$, per cui non può essere trattato con il metodo semplificato detto "a parametri concentrati", descritto nel paragrafo 16.4.2.

I metodi alle differenze finite per la soluzione di problemi di trasmissione del calore in regime transitorio sono numerosi. In questo testo introduttivo saranno trattati i due metodi di base, quello esplicito e quello implicito, rinviando a testi più specialistici gli eventuali approfondimenti sui metodi più evoluti ed efficienti, quali il metodo di Crank-Nicholson, il metodo A.D.I. (Alternating Direction Implicit) eccetera.

Senza perdita di generalità applichiamo la tecnica alle differenze finite al caso della lastra piana indefinita in direzione perpendicolare allo spessore, già trattata

con il metodo analitico della separazione delle variabili e schematizzata in Figura 19.3.2.1.

Ipotizzando che non vi sia generazione interna di calore, che il flusso termico sia monodimensionale in direzione dell'asse x , essendo le dimensioni della lastra in direzione perpendicolare a x molto maggiori dello spessore $2L$, che la temperatura iniziale della lastra al tempo $t=0$ sia uniforme e pari a T_{iniz} , che le facce in $x=0$ e $x=2L$ siano mantenute a temperature costanti e uniformi pari a T_s e che non vi sia generazione interna di calore, l'equazione differenziale che descrive la distribuzione di temperatura in funzione della posizione x e del tempo t è l'equazione di Fourier, espressa, indicando con α la diffusività termica del materiale della lastra, come

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (19.3.2.1)$$

con le condizioni al contorno

$$T(0, t) = T_s \quad \text{per } x=0 \quad \text{e } t>0 \quad (19.3.2.2a)$$

$$T(2L, t) = T_s \quad \text{per } x=2L \quad \text{e } t>0 \quad (19.3.2.2b)$$

e la condizione iniziale

$$T(x, 0) = T_{iniz} \quad \text{per } 0 < x < 2L \quad \text{e } t=0 \quad (19.3.2.3)$$

Adimensionalizziamo il problema ponendo

$$T^* = \frac{T - T_{iniz}}{T_s - T_{iniz}}, \quad x^* = \frac{x}{2L} \quad \text{e } t^* = \frac{\alpha}{(2L)^2} t = \frac{\lambda}{(2L)^2 c \rho} t = Fo$$

dove

- $\alpha = \frac{\lambda}{c\rho}$ è la diffusività termica del materiale della lastra, in $[m^2 s^{-1}]$;
- λ è la conduttività termica del materiale della lastra, in $[W m^{-1} K^{-1}]$;
- c è il calore specifico del materiale della lastra, in $[J kg^{-1} K^{-1}]$;
- ρ è la densità del materiale della lastra, in $[kg m^{-3}]$;
- $Fo = \frac{\alpha}{(2L)^2} t$ è il numero adimensionale di Fourier.

$$\text{Si ha } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (T_i - T_s) \frac{\partial^2 \left(\frac{T - T_i}{T_i - T_s} \right)}{(2L)^2 \partial \left(\frac{x}{2L} \right)^2} = \frac{(T_i - T_s)}{(2L)^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(T_i - T_s)}{(2L)^2} \frac{\partial \left(\frac{T - T_i}{T_i - T_s} \right)}{\partial \left(\frac{t}{(2L)^2} \right)} = \frac{(T_i - T_s)}{(2L)^2} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad \text{che sostituiti nella (19.3.2.1) danno}$$

$$\frac{(T_i - T_s)}{(2L)^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{\alpha} \frac{(T_i - T_s)}{(2L)^2} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad \text{ovvero, l'equazione di Fourier adimensionale è}$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (19.3.2.4)$$

con le condizioni al contorno adimensionali

$$T^*(0, t^*) = 1 \quad \text{per} \quad x^* = 0 \quad \text{e} \quad t^* > 0 \quad (19.3.2.5a)$$

$$T^*(1, t^*) = 1 \quad \text{per} \quad x^* = 1 \quad \text{e} \quad t^* > 0 \quad (19.3.2.5b)$$

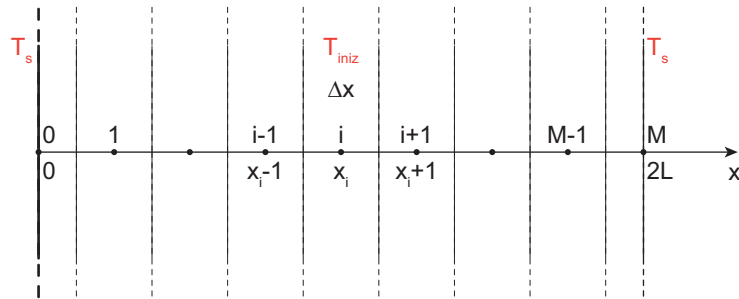
e la condizione iniziale adimensionale

$$T^*(x^*, 0) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < x^* < 1 \quad \text{e} \quad t^* = 0 \quad (19.3.2.6)$$

Per risolvere il problema con il metodo delle differenze finite operiamo, in primo luogo, la discretizzazione del sistema, suddividendo la lastra in elementi di spessore Δx , ponendo al centro di ognuno un nodo, indicato genericamente con l'indice i , con $0 \leq i \leq M$ (vedi Figura 19.3.2.1). Gli elementi superficiali hanno spessore $\Delta x/2$, in modo tale che i nodi $i=0$ e $i=M$ si trovano sulle superfici limite della piastra su cui vengono imposte le condizioni al contorno.

Figura 19.3.1.2

Discretizzazione della piastra piana indefinita con spessore $2L$ in direzione x , con la condizione iniziale T_{iniz} e con le condizioni al contorno a temperatura fissata T_s .



Dalla discretizzazione spaziale risulta quindi $\Delta x = \frac{2L}{M}$ e $x = i\Delta x$.

Operiamo anche una discretizzazione della variabile temporale, definendo un intervallo di tempo Δt e un indice p , con numero intero maggiore o uguale a zero, in modo tale che ogni istante di tempo può essere espresso in modo discreto come $t = p\Delta t$.

In forma adimensionale le suddette grandezze diventano:

$$x^* = \frac{x}{2L} = \frac{i\Delta x}{2L} = i\Delta x^*, \quad \Delta x^* = \frac{\Delta x}{2L} = \frac{1}{M} \quad \text{e} \quad \Delta t^* = \frac{\alpha}{(2L)^2} \Delta t, \quad t^* = p\Delta t^*$$

SOLUZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE CON METODO ESPLICITO

Il **metodo esplicito** alle differenze finite consiste nel determinare le temperature incognite $T_i^{(p+1)}$ al passo temporale $(p+1)$ direttamente dalla conoscenza delle temperature $T_i^{(p)}$ al precedente passo temporale (p) .

Allora, possiamo esprimere alle differenze finite la $\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$ e la $\frac{\partial T^*}{\partial t^*}$ al tempo $t^* = p\Delta t^*$ come

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T_i^{(p)}}{\partial x^{*2}} &= \frac{T_{i-1}^{(p)} - 2T_i^{(p)} + T_{i+1}^{(p)}}{(\Delta x^*)^2} + O[(\Delta x^*)^2] \\ \frac{\partial T_i^{(p)}}{\partial t^*} &= \frac{T_i^{(p+1)} - T_i^{(p)}}{(\Delta t^*)} + O[(\Delta t^*)]\end{aligned}$$

che, sostituite nell'equazione di Fourier adimensionale (19.3.2.4), danno

$$\frac{T_{i-1}^{(p)} - 2T_i^{(p)} + T_{i+1}^{(p)}}{(\Delta x^*)^2} = \frac{T_i^{(p+1)} - T_i^{(p)}}{(\Delta t^*)}$$

da cui, ponendo $r = \frac{(\Delta t^*)}{(\Delta x^*)^2}$ si ottiene l'espressione alle differenze finite della (19.3.2.4), che vale per tutti i nodi interni

$$T_i^{(p+1)} = r(T_{i-1}^{(p)} + T_{i+1}^{(p)}) + (1 - 2r)T_i^{(p)} \quad \text{con } 1 \leq i \leq M-1 \text{ e } p > 0 \quad (19.3.2.7)$$

Applicando le condizioni al contorno si ha

$$T_0^{(p+1)} = 1 \quad \text{in } i = 0 \text{ e per } p > 0 \quad (19.3.2.8a)$$

$$T_M^{(p+1)} = 1 \quad \text{in } i = M \text{ e per } p > 0 \quad (19.3.2.8b)$$

e utilizzando la condizione iniziale si ha

$$T_i^{(0)} = 0 \quad \text{in } 0 < i < M \text{ e per } p = 0 \quad (19.3.2.9)$$

L'errore di discretizzazione è dell'ordine $O[(\Delta x^*)^2 + (\Delta t^*)]$.

Abbiamo, quindi, ottenuto il seguente sistema di equazioni algebriche

$$\begin{cases} T_0^{(p+1)} = 1 & \text{per il nodo } i = 0 \\ T_1^{(p+1)} = r(T_0^{(p)} + T_2^{(p)}) + (1 - 2r)T_1^{(p)} & \text{per il nodo } i = 1 \\ \dots \\ T_i^{(p+1)} = r(T_{i-1}^{(p)} + T_{i+1}^{(p)}) + (1 - 2r)T_i^{(p)} & \text{per il generico nodo interno } i \\ \dots \\ T_{M-1}^{(p+1)} = r(T_{M-2}^{(p)} + T_{M+2}^{(p)}) + (1 - 2r)T_{M-1}^{(p)} & \text{per il nodo } i = M-1 \\ T_M^{(p+1)} = 1 & \text{per il nodo } i = M \end{cases}$$

Il metodo esplicito è, quindi, molto semplice: infatti partendo dall'istante iniziale in cui è nota la temperatura adimensionale in ogni nodo si ricava facilmente la temperatura adimensionale in tutti i nodi al passo di tempo successivo e così via iterativamente.

Una volta ottenute le temperature adimensionali in tutti i nodi a un determinato istante di tempo adimensionale è facile ottenere in ogni nodo la temperatura dimensionale esplicitandola dalla definizione $T^* = \frac{T - T_{iniz}}{T_s - T_{iniz}}$.

È evidente che la soluzione sarà tanto più precisa quanto più piccolo è il passo di discretizzazione spaziale Δx e convergerà tanto più velocemente quanto più è grande il passo temporale Δt . In realtà, però, la scelta dei passi Δx e Δt non è libera ma vincolata dal fatto che il coefficiente $(1-2r)$ di $T_i^{*(p)}$ deve essere maggiore di zero. Infatti se così non fosse, facendo riferimento all'equazione (19.3.2.7), nel caso in cui le temperature adimensionali $T_{i-1}^{*(p)}$ e $T_{i+1}^{*(p)}$ fossero uguali tra loro e inferiori a $T_i^{*(p)}$, la temperatura adimensionale $T_i^{*(p+1)}$ nel nodo i al passo temporale $(p+1)$ sarebbe inferiore a quella dei nodi adiacenti. Ma questo potrebbe accadere solo se fosse fluìto calore da punti a temperatura inferiore a punti a temperatura superiore, il che contrasta con il secondo principio della termodinamica.

Allora deve essere

$$1 - 2r > 0 \quad \text{ovvero} \quad 1 - 2 \frac{(\Delta t)^*}{(\Delta x^*)^2} = 1 - 2 \frac{\alpha \frac{(\Delta t)}{(2L)^2}}{\frac{(\Delta x)^2}{(2L)^2}} = 1 - 2\alpha \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2}$$

da cui si ricava

$$(\Delta t) < \frac{1}{2\alpha} (\Delta x)^2 \quad (19.3.2.10)$$

La relazione (19.3.2.10) costituisce il **criterio di stabilità** del metodo esplicito, nel caso di condizioni al contorno di 1° tipo sulle facce del sistema. Tale criterio determina, una volta che sia nota la diffusività termica α e sia stato fissato il passo spaziale Δx , il valore massimo del passo temporale Δt oltre il quale la soluzione presenta instabilità.

Nel caso in cui siano presenti condizioni al contorno di altro tipo occorre determinare il corrispondente criterio di convergenza e utilizzare quello più stringente.

Il criterio di stabilità limita fortemente l'utilizzabilità del metodo esplicito, perché per rispettarlo è necessario utilizzare passi Δx e Δt così piccoli da richiedere tempi di calcolo troppo alti.

SOLUZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE CON METODO IMPLICITO

È possibile superare i limiti del metodo esplicito utilizzando il cosiddetto **metodo implicito** alle differenze finite, che consiste nell'esprimere la $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ nell'equazione di Fourier non al tempo $p \Delta t$ ma al nuovo istante di tempo $t + \Delta t = (p+1) \Delta t$.

Allora, utilizzando la formulazione in termini di grandezze adimensionali si ha

$$\frac{\partial^2 T_i^{*(p+1)}}{\partial x^{*2}} = \frac{T_{i-1}^{*(p+1)} - 2T_i^{*(p+1)} + T_{i+1}^{*(p+1)}}{(\Delta x^*)^2} + O[(\Delta x^*)^2]$$

$$\frac{\partial T_i^{*(p+1)}}{\partial t^*} = \frac{T_i^{*(p+1)} - T_i^{*(p)}}{(\Delta t^*)} + O[(\Delta t^*)]$$

da cui si ricava

$$\frac{T_{i-1}^{*(p+1)} - 2T_i^{*(p+1)} + T_{i+1}^{*(p+1)}}{(\Delta x^*)^2} = \frac{T_i^{*(p+1)} - T_i^{*(p)}}{(\Delta t^*)}$$

e, ponendo $r = \frac{(\Delta t^*)}{(\Delta x^*)^2}$ si ottiene l'espressione alle differenze finite della (19.3.2.4), che vale per tutti i nodi interni

$$-rT_{i-1}^{*(p+1)} + (1 + 2r)T_i^{*(p+1)} - rT_{i+1}^{*(p+1)} = T_i^{*(p)} \quad \text{con } 1 \leq i \leq M-1 \text{ e } p > 0 \quad (19.3.2.10)$$

mentre le condizioni al contorno e la condizione iniziale danno

$$T_0^{*(p+1)} = 1 \quad \text{per } i = 0 \text{ e } p > 0 \quad (19.3.2.11a)$$

$$T_M^{*(p+1)} = 1 \quad \text{per } i = M \text{ e } p > 0 \quad (19.3.2.11b)$$

$$T_i^{*(0)} = 1 \quad \text{per } 1 \leq i \leq M-1 \text{ e } p = 0 \quad (19.3.2.12)$$

L'errore di discretizzazione è dell'ordine $O[(\Delta x^*)^2 + (\Delta t^*)]$.

Abbiamo, quindi, ottenuto il seguente sistema di equazioni algebriche

$$\begin{cases} T_0^{*(p+1)} = 1 & \text{per il nodo } i = 0 \\ -rT_0^{*(p+1)} + (1 + 2r)T_1^{*(p+1)} - rT_2^{*(p+1)} = T_1^{*(p)} & \text{per il nodo } i = 1 \\ \dots \\ -rT_{i-1}^{*(p+1)} + (1 + 2r)T_i^{*(p+1)} - rT_{i+1}^{*(p+1)} = T_i^{*(p)} & \text{per il generico nodo interno } i \\ \dots \\ -rT_{M-2}^{*(p+1)} + (1 + 2r)T_{M-1}^{*(p+1)} - rT_M^{*(p+1)} = T_{M-1}^{*(p)} & \text{per il nodo } i = M-1 \\ T_M^{*(p+1)} = 1 & \text{per il nodo } i = M \end{cases}$$

Pertanto, utilizzando il metodo implicito per determinare le temperature incognite al tempo $(p+1)\Delta t$ è necessario risolvere con gli usuali metodi il sistema di equazioni algebriche riportato sopra.

Il vantaggio del metodo implicito è dato dal fatto che è stabile per ogni valore dell'intervallo di discretizzazione temporale Δt , per cui l'unica restrizione su Δt è basata su considerazioni relative all'errore di discretizzazione.

Si noti che il sistema da risolvere a ogni passo di tempo, con le condizioni al contorno di 1° tipo (19.3.2.11a), è il seguente

$$\begin{cases} +(1+2r)T_1^{*(p+1)} - rT_2^{*(p+1)} = T_1^{*(p)} + r & \text{per il nodo } i = 1 \\ \dots \\ -rT_{i-1}^{*(p+1)} + (1+2r)T_i^{*(p+1)} - rT_{i+1}^{*(p+1)} = T_i^{*(p)} & \text{per il generico nodo interno } i \\ \dots \\ -rT_{M-2}^{*(p+1)} + (1+2r)T_{M-1}^{*(p+1)} = T_{M-1}^{*(p)} + r & \text{per il nodo } i = M - 1 \end{cases}$$

che, ponendo $N=M-1$, è un caso particolare del sistema tridiagonale

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= v_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= v_3 \\ &\dots \\ a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} &= v_i \\ &\dots \\ a_{N-1,N-2}x_{N-2} + b_{N-1,N-1}x_{N-1} + a_{N-1,N}x_N &= v_{N-1} \\ a_Nx_{N-1} + b_Nx_N &= v_N \end{aligned}$$

che può essere scritto in forma matriciale $A \cdot X = V$, dove A è la matrice dei coefficienti, X il vettore delle incognite e V il vettore dei termini noti, e può essere risolto con gli usuali metodi descritti in precedenza.

19.3.3

SOLUZIONE APPROSSIMATA CON IL METODO GRAFICO

L'equazione di Fourier della conduzione termica in regime transitorio in solidi con $Bi > 0,1$ è stata risolta da numerosi autori utilizzando i diversi metodi illustrati nei paragrafi precedenti.

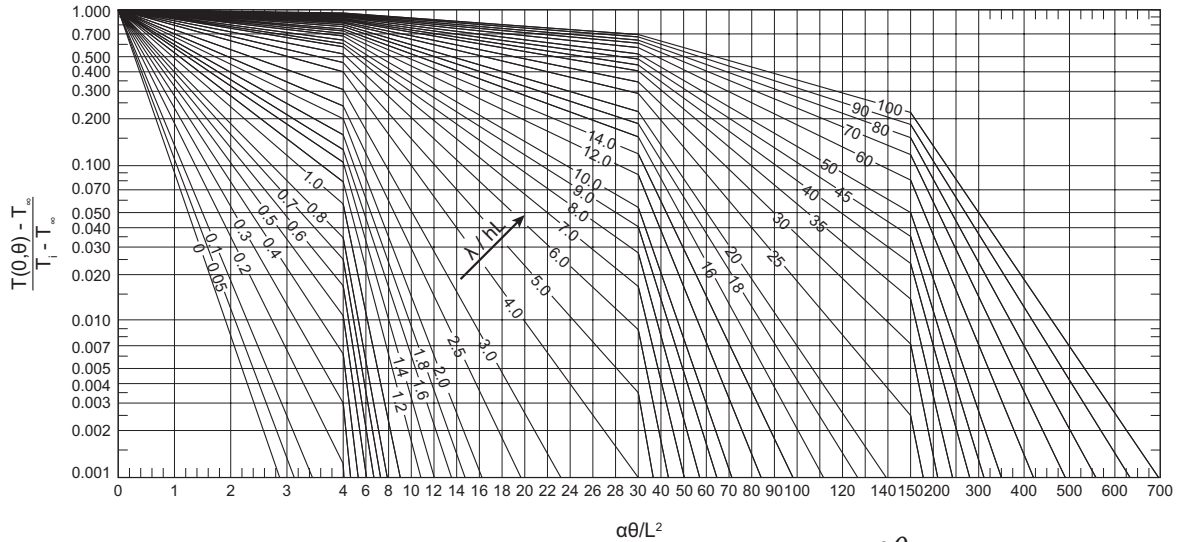
Tali soluzioni sono spesso presentate mediante grafici di uso pratico ottenuti, in particolare, per geometrie di particolare importanza dal punto di vista applicativo, come, per esempio, quella piana, quella cilindrica e quella sferica, spesso utilizzate per rappresentare, anche in modo approssimato, molti sistemi ingegneristici.

Numerosi diagrammi sono riportati in:

1. Heisler M.P. "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating", in *Trans. ASME*, vol. 69, pgg. 227-236, 1947;
2. Grber H.E.S. and Grigull U., *Fundamentals of Heat Transfer*, McGraw-Hill Book C., (N.Y.) 1961;
3. Boelter L.M., Cherry V.H. e Johnson H.A., *Heat Transfer*, Berkley, Univ. of California Press, 1949.

Per esempio, possiamo considerare il diagramma, tratto dal riferimento bibliografico 1. e riportato in Figura 19.3.3.1, relativo a una lastra piana avente spessore $2L$, in direzione dell'asse x , e lunghezza molto grande nelle direzioni perpendico-

lari allo spessore, costituita da materiale omogeneo, di cui si considerano noti i valori della conduttività termica λ , del calore specifico c_p , della diffusività termica α e della densità ρ . La lastra, che si trova inizialmente a temperatura uniforme T_i , viene immersa in un fluido a temperatura costante T_∞ , con cui scambia calore per convezione con coefficiente convettivo h_c .



Sull'asse delle ascisse del diagramma si ha il tempo adimensionale $Fo = \frac{\alpha\theta}{L^2}$,

dove θ è il tempo e α la diffusività termica del materiale della lastra, e su quello delle ordinate il rapporto adimensionale $\frac{T(0,\theta) - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ dove $T(0,\theta)$ è la temperatura al tempo θ in $x=0$, ovvero nel piano mediano della lastra, in cui è posta l'origine dell'asse delle ascisse. Le curve nel diagramma sono parametrizzate in termini dell'inverso del numero di Biot $\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{h_c L}$.

Una volta selezionata la curva corrispondente al valore dell'inverso del numero di Biot del sistema, a ogni istante di tempo θ si può calcolare il numero di Fourier, in corrispondenza del quale si determina l'incrocio con la curva selezionata, per poi leggere sull'asse delle ordinate il valore del rapporto $\frac{T(0,\theta) - T_\infty}{T_i - T_\infty}$, dopo di che il calcolo del valore della temperatura al tempo θ nel piano mediano della lastra risulta banale.

In Figura 19.3.3.2 è riportato il grafico che permette di determinare, nella lastra indefinita di spessore $2L$, la temperatura $T(x, \theta)$ in diverse posizioni lungo lo spessore, in funzione della temperatura $T(0,\theta)$ sul piano mediano della lastra.

Nel diagramma in ascissa si ha l'inverso del numero di Biot, $\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{h_c L}$, in ordinata il rapporto adimensionale $\frac{T(x,\theta) - T_\infty}{T(0,\theta) - T_\infty}$ e le diverse curve si riferiscono a selezionati valori dell'ascissa adimensionale x/L lungo lo spessore della lastra.

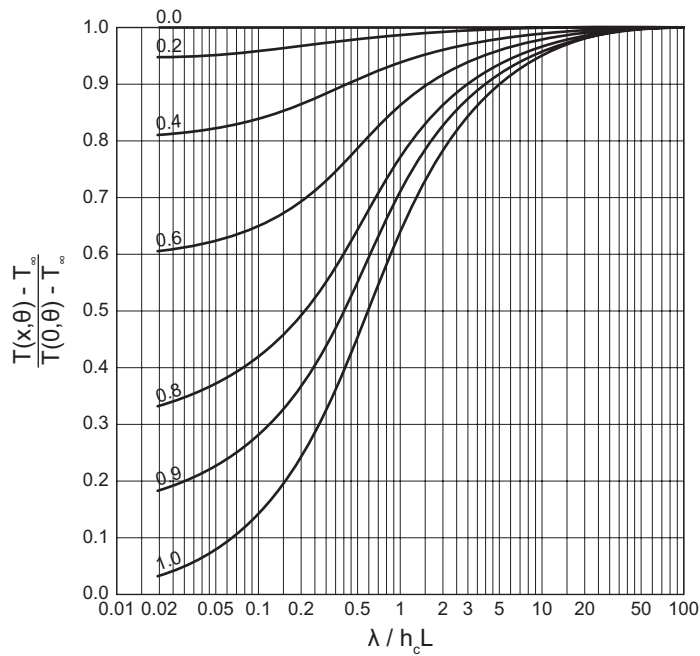
Infine in Figura 19.3.3.3 sono riportate le curve, identificate con diversi valori del numero di Biot, $Bi = \frac{h_c L}{\lambda}$, che permettono di ricavare il rapporto $\frac{Q}{Q_i}$ in funzione della quantità $\frac{h_c^2 \alpha}{2} \theta = (Bi^2 Fo)$.

Figura 19.3.3.1

Grafico per il calcolo della temperatura del piano centrale ($x=0$) della lastra piana indefinita di spessore $2L$ (tratto da Heisler, 1947 (riferimento [1])).

Figura 19.3.3.2

Grafico per il calcolo della temperatura in diverse posizioni x/L in funzione della temperatura del piano centrale ($x=0$) della lastra piana indefinita di spessore $2L$ (tratto da Heisler 1947 (riferimento [1])).

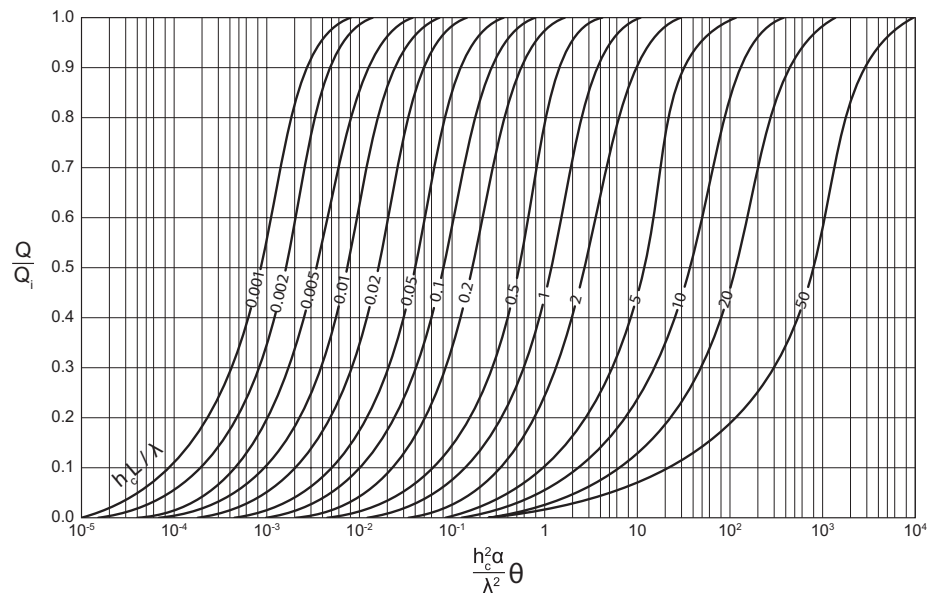


Nel rapporto $\frac{Q}{Q_i}$ posto in ordinata, Q è la grandezza che si vuole determinare e rappresenta la variazione di energia interna per unità di superficie della piastra, ovvero il calore scambiato per unità di superficie tra piastra e fluido nell'intervallo di tempo compreso tra l'inizio del processo ($\theta = 0$) e l'istante di tempo θ considerato. $Q_i = c\rho L(T_i - T_\infty)$ è l'energia interna iniziale, per unità di superficie, riferita alla temperatura T_∞ del fluido.

Se Q è positivo, ovvero se $(T_i = T_\infty) > 0$, il calore fluisce dalla piastra al fluido e viceversa.

Figura 19.3.3.3

Grafico per il calcolo del calore scambiato dalla lastra piana indefinita di spessore $2L$ (tratto da Grber and Grigull, 1961 (riferimento [2])).



Esempio 19.3.3.1

Una piastra di acciaio, avente spessore $2L=20\text{ cm}$ e dimensioni perpendicolari allo spessore molto maggiori di L , si trova inizialmente alla temperatura $T_i(x, 0) = 410\text{ }^\circ\text{C}$ e viene raffreddata immergendola in un liquido avente temperatura costante $T_\infty = 10\text{ }^\circ\text{C}$.

Se il coefficiente di scambio termico convettivo è

$$h_c = 200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ }^\circ\text{C}}$$

e le proprietà del materiale sono:

- conduttività termica $\lambda = 40 \frac{\text{W}}{\text{m } ^\circ\text{C}}$
- calore specifico $c = 0,47 \frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^\circ\text{C}}$
- densità $\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- diffusività termica $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{h}}$

determinare:

- a) il tempo θ_f necessario perché la temperatura del piano centrale della piastra si porti al valore $T(0, \theta_f) = 90\text{ }^\circ\text{C}$;
- b) la distribuzione di temperatura, al tempo θ_f , lungo l'asse della piastra;
- c) il calore trasmesso dalla piastra al fluido dall'inizio del processo di raffreddamento al tempo θ_f .

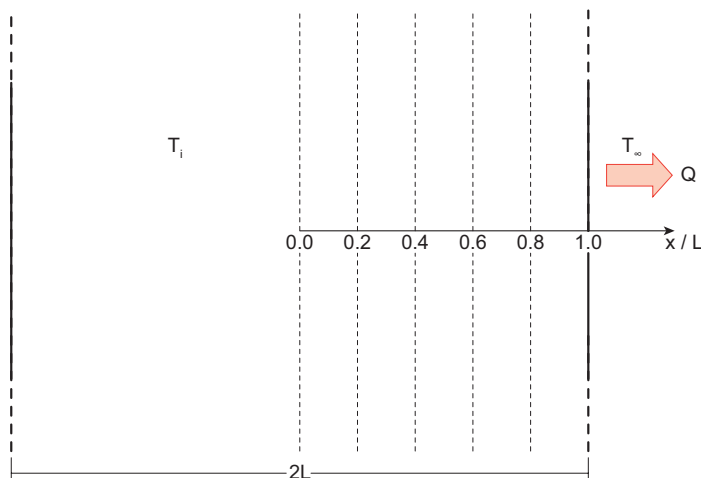


Figura 19.3.3.4

Sezione della piastra piana indefinita con spessore $2L$ in direzione x , inizialmente alla temperatura T_i raffreddata con un fluido a temperatura T_∞ .

Analisi

Si calcola in primo luogo il numero di Biot del sistema, mediante la definizione

$Bi = \frac{h_c L}{\lambda}$, per valutare, nel caso sia $Bi < 0,1$, se è possibile utilizzare il metodo risolutivo a parametri concentrati.

Noto il numero di Biot si calcola il suo inverso $1/Bi$, poi il rapporto $\frac{T(0, \theta) - T_\infty}{T_i - T_\infty}$.

I due valori vengono utilizzati per ricavare dal grafico in Figura 19.3.3.1 il tempo adimensionale $Fo = \frac{\alpha\theta}{L^2}$, da cui è possibile esplicitare il tempo $\theta = \theta_f = \frac{L^2}{\alpha} Fo$ necessario perché la temperatura del piano centrale della piastra si porti al valore $T(0, \theta_f) = 90^\circ\text{C}$.

Per determinare la distribuzione di temperatura lungo l'asse della piastra si utilizza il grafico in Figura 19.3.3.2 ricavando in funzione dell'inverso del numero di Biot in ascissa il valore del rapporto adimensionale $\frac{T(x, \theta) - T_\infty}{T(0, \theta) - T_\infty}$ per i diversi valori di x/L .

Infine, per determinare il calore Q scambiato tra piastra e fluido nell'intervallo di tempo $0 \leq \theta \leq \theta_f$ si utilizza il grafico di Figura 19.3.3.3 per ricavare in funzione

del prodotto $(Bi^2 Fo) = \frac{h^2 \alpha}{\lambda^2} \theta_f$ il rapporto $\frac{Q}{Q_i}$ dove $Q_i = c\rho L(T_i - T_\infty)$.

Soluzione

Soluzione a)

$Bi = \frac{h_c L}{\lambda} = 0,5$: essendo $Bi > 0,1$ non si utilizza il metodo a parametri concentrati.
 $Bi = 0,5 \rightarrow \frac{1}{Bi} = 2,0$

Al tempo $\theta = \theta_f$ si ha $T(0, \theta) = 90^\circ\text{C}$ e quindi $\frac{T(0, \theta) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{90 - 10}{410 - 10} = 0,20$.

Utilizzando i valori appena calcolati come indicato in Figura 19.3.3.5 si ricava $Fo = \frac{\alpha\theta}{L^2} = 4$ da cui $\theta = \theta_f = \frac{L^2}{\alpha} Fo = \frac{0,1^2 \text{ m}^2}{0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{h}}} 4 = 1 \text{ h}$. Ovvero dopo un'ora

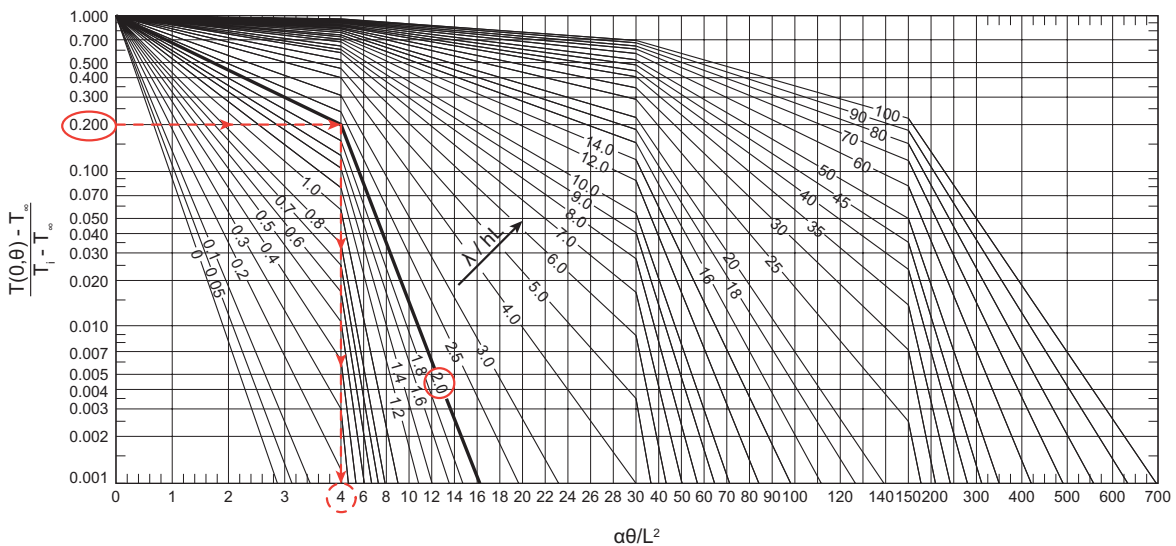
dall'inizio del processo di raffreddamento sul piano centrale della piastra si ha $T(0, \theta_f) = 90^\circ\text{C}$.

Figura 19.3.3.5

Procedura per la determinazione del rapporto

$$\frac{T(0, \theta) - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

per il calcolo della temperatura $T(0, \theta)$ del piano centrale della lastra piana indefinita.



Soluzione b)

Dal grafico di Figura 19.3.3.2 è possibile ricavare, ricordando che $\theta=\theta_f$, in corrispondenza di $\frac{1}{Bi} = 2,0$, come indicato in Figura 19.3.3.6 e come riportato in Tabella 19.3.3.1 i valori del rapporto $\frac{T(x,\theta_f)-T_\infty}{T(0,\theta_f)-T_\infty}$ per diverse ascisse adimensionali x/L lungo l'asse della lastra, per poi calcolare la temperatura dimensionale $T(x,\theta)$ nelle diverse posizioni x .

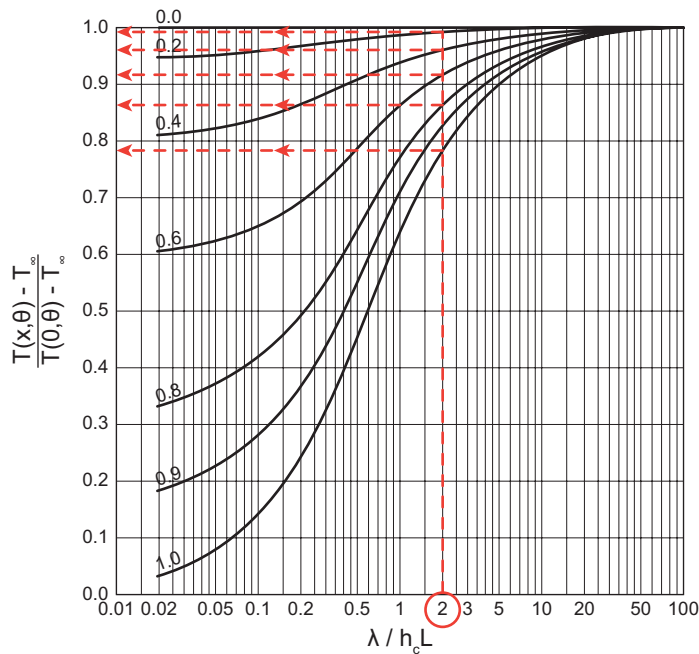


Figura 19.3.3.6
Procedura per la determinazione del rapporto $\frac{T(x,\theta) - T_\infty}{T(0,\theta) - T_\infty}$ per il calcolo della distribuzione di temperatura lungo l'asse della lastra piana indefinita.

Grandezza	U.d.M.	Valori ricavati dalla figura 19.3.3.6					
x/L	adimensionale	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{T(x,\theta_f) - T_\infty}{T(0,\theta_f) - T_\infty}$	adimensionale	1,0	0,99	0,96	0,90	0,87	0,80
Valori calcolati							
x	m	0.00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$T(x,\theta_f)$	°C	90,0	89,2	86,8	82,0	79,6	74,0

Tabella 19.3.3.1
Distribuzione di temperatura lungo l'asse della piastra al tempo.

Soluzione c)

Utilizzando i seguenti valori del numero di Biot $Bi=0,5$ e del parametro

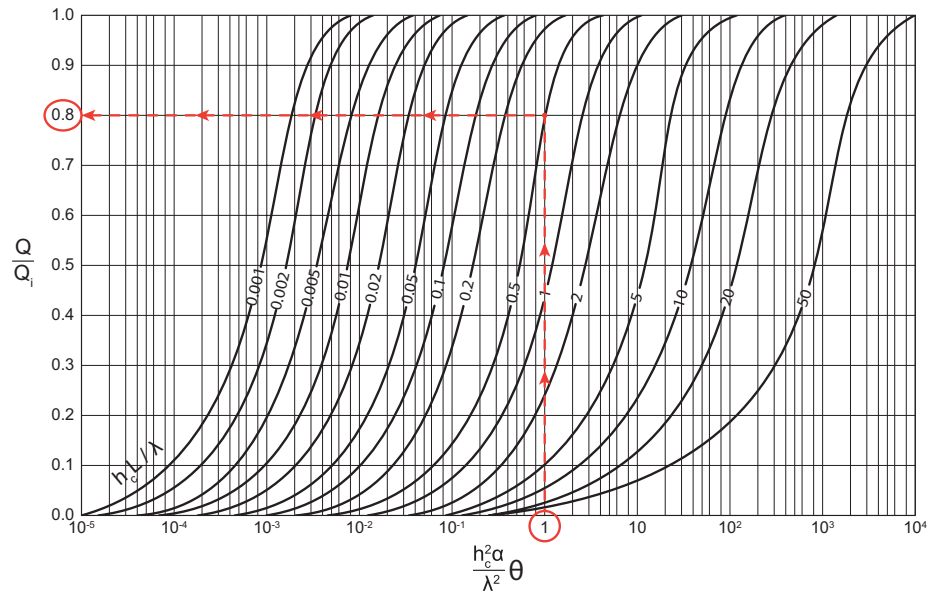
$$\frac{h_c^2 \alpha}{2} \theta_f = (Bi^2 Fo) = 0,5^2 \cdot 4 = 1,0$$

è possibile ricavare, con la procedura indicata in Figura 19.3.3.7 il rapporto $\frac{Q}{Q_i} = 0,8$, da cui si ricava il calore Q scambiato tra piastra e fluido nell'intervallo di tempo $0 \leq \theta \leq \theta_r$:

$$Q = 0,8 \cdot Q_i = 0,8 \cdot [c\rho L(T_i - T_\infty)] = 0,8 \cdot 0,47 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \cdot 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,1\text{m} \cdot (410 - 10)^\circ\text{C}$$

$$Q = 117312 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2}$$

Figura 19.3.3.7
Procedura per la determinazione del rapporto $\frac{Q}{Q_i}$ per il calcolo del calore scambiato dalla lastra piana indefinita.



Discussione

L'uso dei grafici consente di risolvere completamente il problema proposto, senza dover affrontare la soluzione diretta dell'equazione differenziale della conduzione termica in regime variabile nel tempo.

Però, in situazioni in cui vengono trattati sistemi solidi di grandi dimensioni o in cui si è interessati agli istanti iniziali del processo di scambio termico, i grafici non consentono la determinazione della temperatura con approssimazione accettabile. Infatti, per esempio nel grafico di Figura 19.3.3.1 il valore del parametro in ascissa, $\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{h_c L}$, è molto piccolo per cui si opera in una regione del diagramma in cui le curve, identificate dal parametro $\lambda/h_c L$, sono estremamente ravvicinate tra di loro e quindi è problematico distinguere la curva che consente di determinare sull'asse delle ordinate il rapporto $\frac{T(0, \theta) - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ con sufficiente precisione.

In questi casi si può ricorrere ad altri diagrammi, reperibili nei riferimenti [1] e [3] citati sopra, che sono relativi a processi termici di breve durata.

La trattazione sviluppata sopra è riferita al caso di un sistema solido a simmetria parallelepipeda in cui avviene un processo di scambio termico conduttivo in regime variabile nel tempo.

Nei riferimenti citati sopra sono comunque disponibili analoghi grafici per sistemi a simmetria cilindrica e sferica e per corpi seminfiniti.

