

ONLINE - 1

Esempi di analisi strutturale

Indice

Introduzione	1
Esempio 1: struttura reticolare iperstatica	1
Esempio 2: struttura di supporto di una puleggia di rinvio	6
Esempio 3: analisi strutturale di sezioni a parete sottile aperte e chiuse	16
La trave a sezione chiusa	17
La trave a sezione aperta	24
Esempio 4: braccio del sistema di mescolamento di un fluido	29
Esempio 5: albero di trasmissione	36
Esempio 6: effetto d'una massa eccentrica su un albero di trasmissione	45
Esempio 7: struttura reticolare d'irrigidimento	52

Introduzione

Gli strumenti teorici e operativi ora disponibili consentono di affrontare casi reali che richiedono visione d'insieme e capacità di individuare gli aspetti salienti che caratterizzano la risposta della struttura e ne definiscono l'integrità.

Gli esempi riportati in questo capitolo, in parte presi da scritti d'esame, trattano casi pratici, presentati in modo adeguatamente semplificato ma comunque a un livello da richiedere lo sforzo di costruzione del modello di analisi e di identificazione delle semplificazioni necessarie per impostare la soluzione.

Gli esempi sono per lo più formulati sotto forma di verifica di integrità, minor enfasi viene data al dimensionamento, che si basa su schemi di calcolo simili, ma richiede di operare delle scelte molto spesso entro una molteplicità di variabili e di vincoli legati alle normative e ai prodotti di mercato. Si lascia quindi ai corsi di progettazione più avanzati il compito di impostare il problema nelle modalità di dimensionamento, ricordando che comunque qualsiasi scelta progettuale, a livello di progetto esecutivo, deve essere validata da una dettagliata verifica.

Esempio 1: struttura reticolare iperstatica

La struttura riportata in figura funge da supporto alla puleggia di rinvio su cui è montata la fune tesa. Si devono condurre le verifiche necessarie per le aste e calcolare lo spostamento del punto C, centro della puleggia.

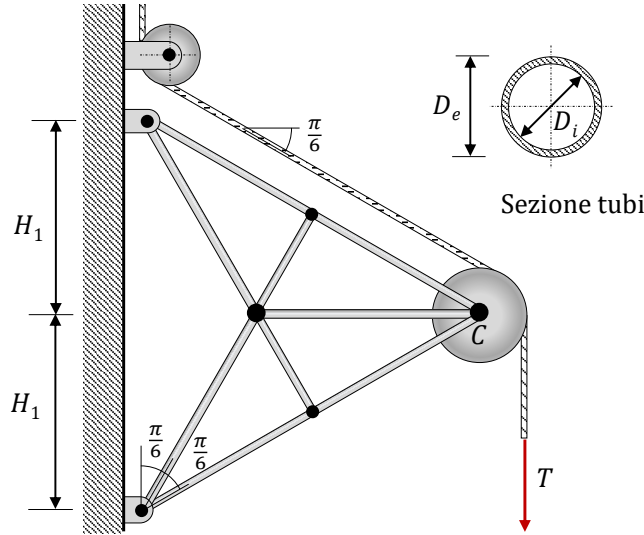


Figura 1: Struttura reticolare iperstatica

Dati del problema:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 1250 \text{ mm} & D_e &= 33.7 \text{ mm} & D_i &= 27.9 \text{ mm} \\
 F &= 15000 \text{ N} & E &= 210 \text{ GPa} & \sigma_{ys} &= 325 \text{ MPa} \\
 A &= \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) = 280.6 \text{ mm}^2 & I &= \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4) = 33569.4 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

Specifiche:

Coefficiente di sicurezza a snervamento: $\phi_s \geq 1.5$

Spostamento ammissibile al punto C: $\delta_{C,amm} \leq 1.25 \text{ mm}$

La puleggia è libera, la tensione nei due rami della fune è la stessa e può essere riportata nel centro della puleggia. In figura 2 sono rappresentati il modello di analisi e lo schema di corpo libero della struttura.

Conviene rappresentare la forza nelle due componenti T_1 e T_2 , in modo utile per il successivo calcolo dello spostamento.

Le due aste rami FD e DE sono scariche in quanto nei nodi F ed E convergono due elementi collineari e i nodi non sono caricati.

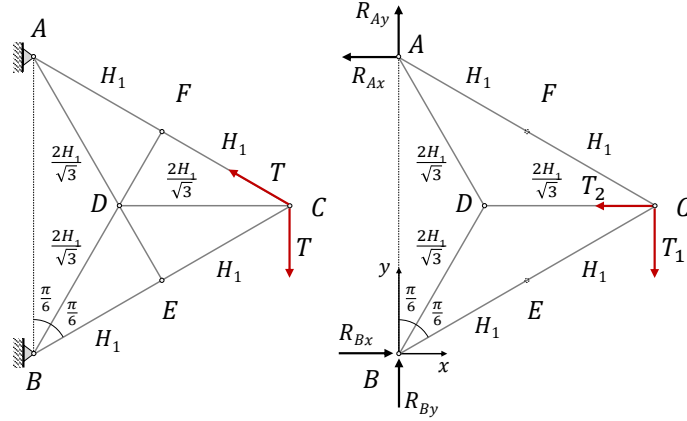


Figura 2: Modello di analisi e schema di corpo libero della struttura

$$T_1 = T - T \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{T}{2} = 7500 \text{ N}$$

$$T_2 = T \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{T\sqrt{3}}{2} = 12990.4 \text{ N}$$

Si osserva che la risultante delle azioni esterne è allineata con il segmento BC , di conseguenza dall'equilibrio alla rotazione intorno a B si ricava:

$$R_{Ax} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx} = T_2 = \frac{T\sqrt{3}}{2}$$

Il sistema è iperstatico, si possono adottare due strategie risolutive: rimuovere un vincolo esterno riconducendo il vincolamento allo schema cerniera-carrello (figura 3 a)), oppure rimuovere un vincolo interno riducendo il sistema a uno o più archi a tre cerniere isostatici (figura 3 b)).

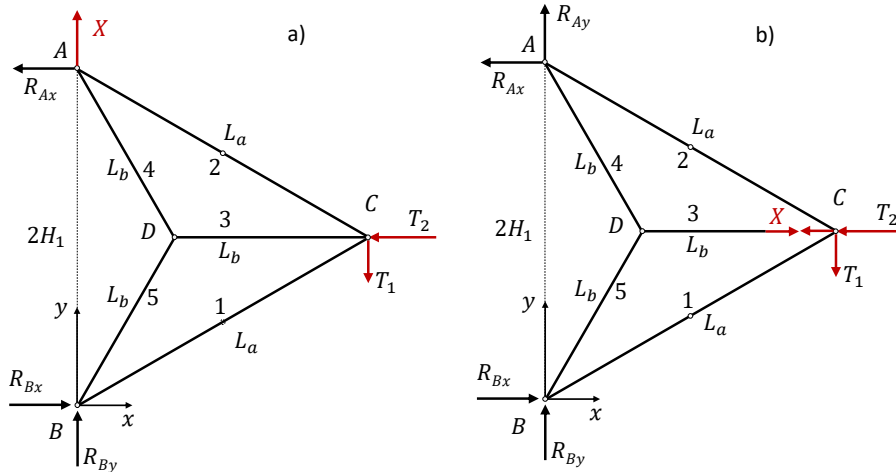


Figura 3: Sistema reso isostatico: a) rimozione di un vincolo esterno, b) rimozione di un vincolo interno

I tre rami convergenti al nodo D sono mutuamente separati da angoli pari a $2\pi/3$, al nodo non sono applicate azioni esterne: l'equilibrio al nodo fornisce forze uguali nelle tre aste AD , DC e DB . Ciò suggerisce di adottare lo schema di figura 3 b) i cui equilibri nodali sono rappresentati in figura 4.

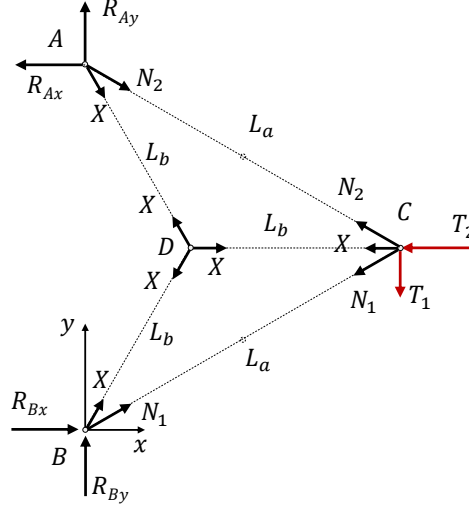


Figura 4: Equilibri nodali nel caso di rimozione di un vincolo interno

L'equilibrio al nodo C permette il calcolo delle azioni N_1 e N_2 , le altre azioni sono note e pari a X .

$$(N_1 + N_2)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + X + T_2 = 0$$

$$(N_1 - N_2)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + T_1 = 0$$

$$N_1 = -T_1 - \frac{X}{\sqrt{3}} - \frac{T_2}{\sqrt{3}} \quad \frac{\partial N_1}{\partial X} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$N_2 = T_1 - \frac{X}{\sqrt{3}} - \frac{T_2}{\sqrt{3}} \quad \frac{\partial N_2}{\partial X} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dallo schema di figura 3:

$$L_a = L_1 = L_2 = 2H_1 \quad L_b = L_3 = L_4 = L_5 = \frac{2H_1}{\sqrt{3}}$$

Con il metodo di Castigliano:

$$0 = \frac{N_1 L_a}{EA} \frac{\partial N_1}{\partial X} + \frac{N_2 L_a}{EA} \frac{\partial N_2}{\partial X} + 3 \frac{X L_b}{EA}$$

$$X = -\frac{2T_2 L_a}{3L_b + 2L_a} = -\frac{2T_2}{3\sqrt{3} + 2} = -3610 \text{ N}$$

Si ricavano quindi le reazioni vincolari e le azioni N_1 e N_2

$$N_1 = -T_1 - \frac{3T_2}{3\sqrt{3} + 2} = -12916 \text{ N} \quad N_2 = T_1 - \frac{3T_2}{3\sqrt{3} + 2} = 2084 \text{ N}$$

$$R_{By} = -X \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - N_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9584 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = -R_{By} + T_1 = -2084 \text{ N}$$

Il verso della reazione R_{Ay} va quindi invertito. Le reazioni vincolari con il verso corretto e le azioni interne sono rappresentate in figura 5.

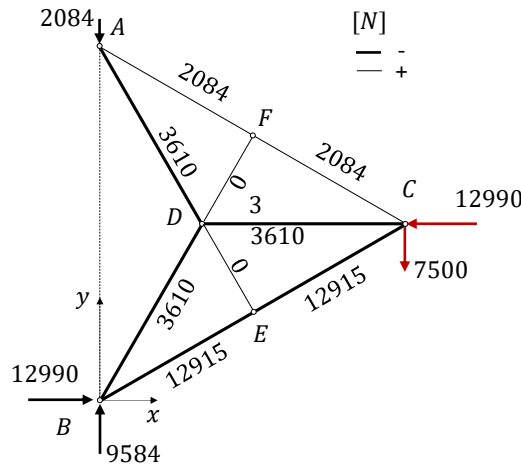


Figura 5: Diagramma delle azioni interne e reazioni vincolari

Lo schema evidenzia che le aste in condizioni più critiche sono BE ed EC .

$$\sigma_{zz} = -\frac{N_1}{A} = -46 \text{ MPa} \quad \phi_s = \frac{\sigma_{ys}}{|\sigma_{zz}|} = 7.06 > 1.5$$

Poiché il carico è di compressione, oltre alla verifica di snervamento è necessaria la verifica d'instabilità dell'equilibrio. Lo schema di calcolo è quello del II caso di Eulero.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{H_1^2} = 44529 \text{ N} \quad \phi_{s,cr} = \frac{P_{cr}}{|N_1|} = 3.45 > 1.5$$

Si osserva che se l'asta BC non fosse vincolata dall'asta rompitratta scarica DE il carico critico sarebbe:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2H_1)^2} = 11132 \text{ N} \quad \phi_{s,cr} = \frac{P_{cr}}{|N_1|} = 0.86 < 1.5$$

Per l'analisi di rigidezza la specifica chiede di controllare lo spostamento del centro della puleggia. Si procede quindi al calcolo delle due componenti δ_x e δ_y utilizzando il teorema di Castigliano:

$$U_E = \frac{N_1^2 L_a}{2EA} + \frac{N_2^2 L_a}{2EA} + 3 \frac{X^2 L_b}{2EA}$$

$$\delta_x = \frac{\partial U_E}{\partial T_2} \quad \delta_y = \frac{\partial U_E}{\partial T_1}$$

Dall'espressione dell'energia elastica:

$$\delta_x = \frac{3L_a}{EA(3\sqrt{3}+2)} \left[\left(T_1 + \frac{3T_2}{3\sqrt{3}+2} \right) - \left(T_1 - \frac{3T_2}{3\sqrt{3}+2} \right) \right] + \frac{12T_2 L_b}{(3\sqrt{3}+2)^2}$$

$$\delta_x = \frac{4\sqrt{3}T_2 H_1}{EA(3\sqrt{3}+2)} = 0.265 \text{ mm}$$

$$\delta_y = \frac{2T_1 L_a}{EA} = 0.636 \text{ mm}$$

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} = 0.69 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad \delta < \delta_{C,amm} = 1.25 \text{ mm}$$

Esempio 2: struttura di supporto di una puleggia di rinvio

Il braccio di supporto di una puleggia di rinvio è realizzato con travi a sezione rettangolare cava ottenute saldando a piena penetrazione due profili a *C*. I due spezzoni ortogonali sono uniti con saldatura a piena penetrazione lungo il piano inclinato indicato in figura. Si deve condurre la verifica a resistenza e a rigidezza. Le specifiche forniscono i coefficienti di sicurezza a snervamento per la trave e la tensione ammissibile per le saldature, nonché lo spostamento ammissibile del centro della puleggia.

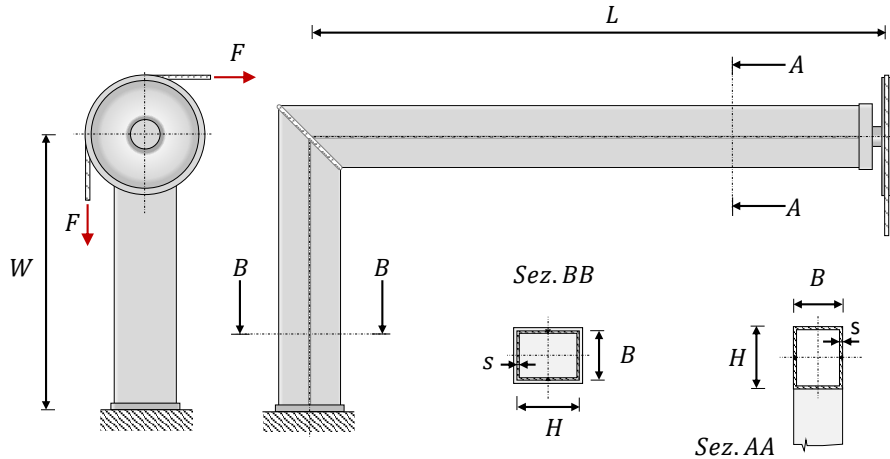


Figura 6: Supporto a *L* per puleggia di rinvio

Dati del problema:

$$H = 100 \text{ mm} \quad B = 80 \text{ mm} \quad s = 6 \text{ mm}$$

$$F = 3500 \text{ N} \quad L = 1200 \text{ mm} \quad W = 600 \text{ mm}$$

Saldatura: $\sigma_{amm,W} = 160 \text{ MPa}$

Profilati: $E = 210 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3 \quad \sigma_{ys} = 275 \text{ MPa}$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 80.769 \text{ GPa}$$

Specifiche:

Saldatura: $\phi_W = 1.25$ Profilati: $\phi = 1.5$ $\delta_{amm} = 2 \text{ mm}$

La tensione nei due rami della fune, essendo la puleggia libera, è la stessa, tuttavia, per procedere poi chiaramente al calcolo degli spostamenti nel modello di analisi e nello schema di corpo libero, si identificano con $F_1 = F$ e $F_2 = F$ le forze nei due rami.

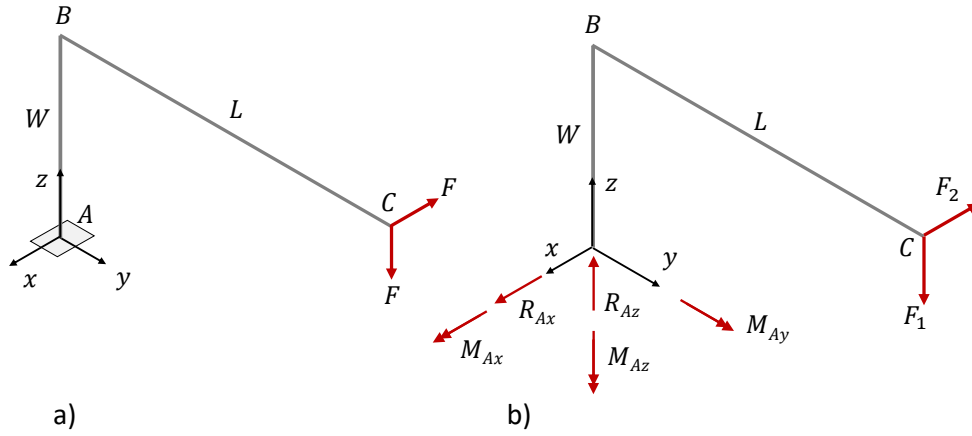


Figura 7: a) Modello di analisi, b) schema di corpo libero

Reazioni vincolari

$$R_{Az} = F_1 = 3500 \text{ N} \quad R_{Ax} = F_2 = 3500 \text{ N}$$

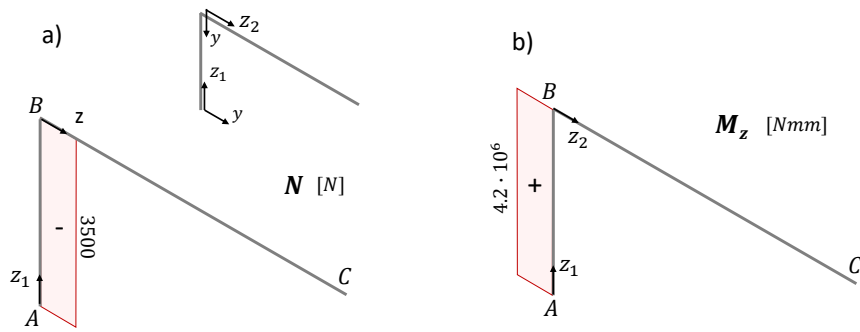
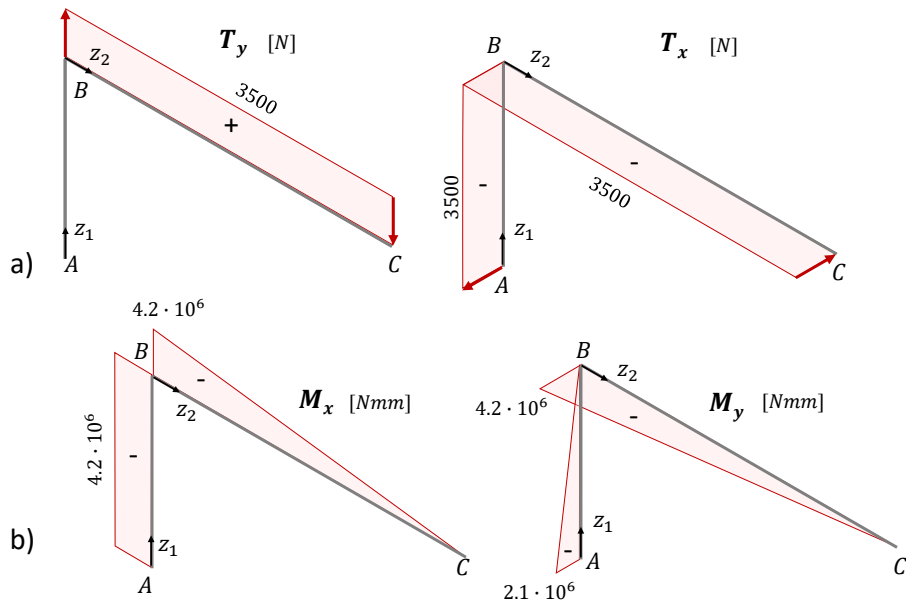
$$M_{Az} = F_2 L = 3500 \cdot 1200 = 4.2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{Ax} = F_1 L = 3500 \cdot 1200 = 4.2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{Ay} = F_2 W = 3500 \cdot 600 = 2.1 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Azioni interne

$$\begin{aligned}
 N &= \begin{cases} -F_1 & 0 \leq z_1 \leq W \\ 0 & 0 \leq z_2 \leq L \end{cases} & M_z &= \begin{cases} F_2 L & 0 \leq z_1 \leq W \\ 0 & 0 \leq z_2 \leq L \end{cases} \\
 T_y &= \begin{cases} 0 & 0 \leq z_1 \leq W \\ F_1 & 0 \leq z_2 \leq L \end{cases} & M_x &= \begin{cases} -F_1 L & 0 \leq z_1 \leq W \\ -F_1(L - z_2) & 0 \leq z_2 \leq L \end{cases} \\
 T_x &= \begin{cases} -F_2 & 0 \leq z_1 \leq W \\ -F_2 & 0 \leq z_2 \leq L \end{cases} & M_y &= \begin{cases} -F_2(W - z_1) & 0 \leq z_1 \leq W \\ -F_2(L - z_2) & 0 \leq z_2 \leq L \end{cases}
 \end{aligned}$$

Figura 8: a) Azione normale N , b) azione torcente M_z Figura 9: a) Azione di taglio T_y , T_x , b) azioni flettenti M_x , M_y

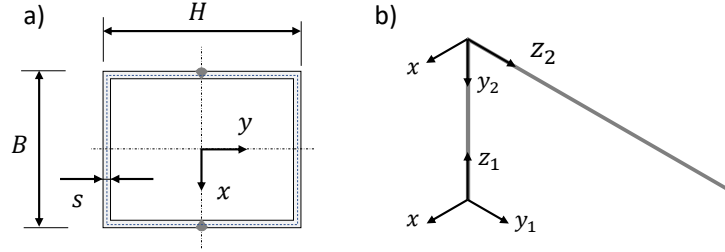
Proprietà geometriche della sezione

Figura 10: a) Caratteristiche geometriche della sezione, b) sistemi di riferimento correnti

$$A = BH - (B - 2s)(H - 2s) = 2016 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{(B - 2s)(H - 2s)^3}{12} = 2.805 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{HB^3}{12} - \frac{(H - 2s)(B - 2s)^3}{12} = 1.961 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\Omega = (B - s)(H - s) = 6956 \text{ mm}^2 \quad (\text{area media})$$

$$J_T = \frac{4\Omega^2 s}{2(B + H - 2s)} = 3.456 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (\text{fattore di rigidezza torsionale})$$

Stato di tensione

Essendo la sezione uguale per tutta la struttura, il punto critico si cerca in base ai diagrammi di azione interna. Potenziali punti di verifica sono:

- l'incastro alla base (A) dove i momenti M_x e M_z sono massimi e anche il momento M_y assume un valore elevato;
- la saldatura (punto di debolezza metallurgica e meccanica della struttura).

Incastro alla base

La tensione σ_{zz} dovuta a flessione e azione normale è data da:

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3500}{2016} - \frac{4.2 \cdot 10^6}{2.805 \cdot 10^6}y + \frac{2.1 \cdot 10^6}{1.961 \cdot 10^6}x$$

$$\sigma_{zz} = -1.736 - 1.497y + 1.070x \quad \text{MPa (se } x, y \text{ in mm)}$$

L'asse neutro per $\sigma_{zz} = 0$

$$y = -1.1594 + 0.7152x \quad \rightarrow \quad \tan(\beta) = 0.7152 \quad (\beta \approx 36^\circ)$$

$$y_0 = -1.159 \text{ mm} \quad x_0 = 1.621 \text{ mm} \quad (\text{intercette con gli assi})$$

L'asse momento:

$$\tan(\gamma) = \frac{M_y}{M_x} = 0.5 \quad (\gamma \approx 26^\circ) \quad \rightarrow \quad y = 0.5 x$$

I punti estremi per σ_{zz} sono 3 e 4. Devono anche essere considerati i punti 1 e 2 in corrispondenza delle saldature.

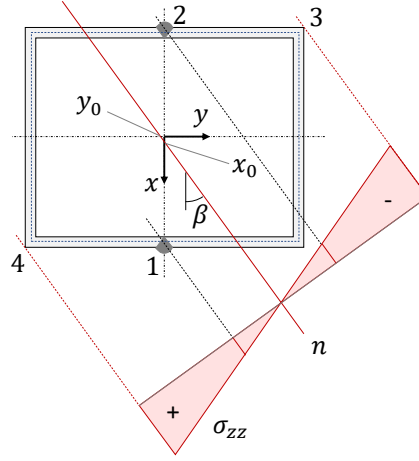


Figura 11: Tensione normale σ_{zz} sulla sezione critica

$$1 : \left(\frac{B}{2}, 0 \right) = (40, 0) \text{ mm} \quad 2 : \left(-\frac{B}{2}, 0 \right) = (-40, 0) \text{ mm}$$

$$3 : \left(-\frac{B}{2}, \frac{H}{2} \right) = (-40, 50) \text{ mm} \quad 4 : \left(\frac{B}{2}, -\frac{H}{2} \right) = (40, -50) \text{ mm}$$

$$\sigma_{zz,1} = -1.736 - 1.497 \cdot 0 + 1.070 \cdot 40 = 41.1 \text{ MPa}$$

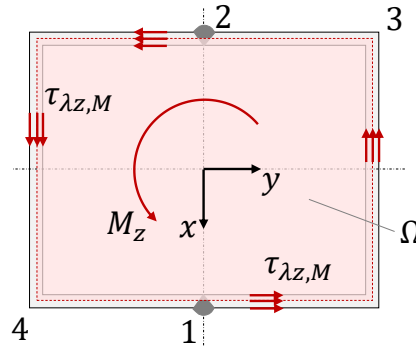
$$\sigma_{zz,2} = -1.736 - 1.497 \cdot 0 + 1.070 \cdot (-40) = -44.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz,3} = -1.736 - 1.497 \cdot 50 + 1.070 \cdot (-40) = -119.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz,4} = -1.736 - 1.497 \cdot (-50) + 1.070 \cdot 40 = 115.9 \text{ MPa}$$

La tensione dovuta a momento torcente si determina dalla prima formula di Bredt per sezioni chiuse a parete sottile.

$$\tau_{\lambda z, M} = \frac{M_z}{2\Omega_s} = \frac{4.2 \cdot 10^6}{2 \cdot 6956 \cdot 6} = 50.3 \text{ MPa}$$

Figura 12: Tensione $\tau_{\lambda z, M}$ dovuta a M_z

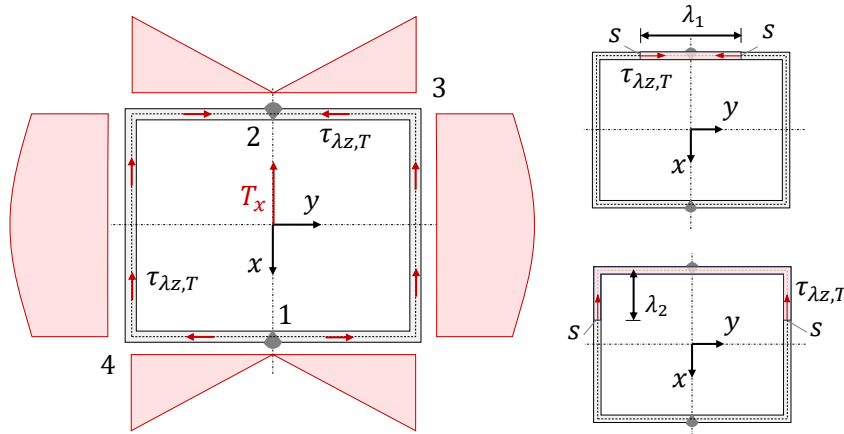
Il flusso $\phi_{\lambda z}$ è coerente con il segno di M_z .

La tensione tangenziale dovuta a taglio retto (T_x) si determina con la formula di Jourawsky, tenendo conto che la sezione chiusa è simmetrica.

$$\tau_{\lambda z, T}(\lambda) = \frac{T_x S_y^*(\lambda)}{2I_y s}$$

$$\tau_{\lambda z, 3, T} = \tau_{\lambda z, 4, T} = \frac{T_y \frac{H(B-s)s}{2}}{2I_y s} = \frac{3500 \cdot (100 \cdot 37)}{2 \cdot 1.961 \cdot 10^6} = 3.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\lambda z, 1, T} = \tau_{\lambda z, 2, T} = 0$$

Figura 13: Tensione $\tau_{\lambda z, T}$ dovuta a T_x

Le tensioni tangenziali dovute a torsione e a taglio si sommano algebricamente, pertanto sono da verificare i punti 2 (saldatura) e 3:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz, 2} &= -44.6 \text{ MPa} & \tau_{\lambda z, 2} &= \tau_{\lambda z, M} = 50.3 \text{ MPa} \\ \sigma_{zz, 3} &= -119.4 \text{ MPa} & \tau_{\lambda z, 3} &= \tau_{\lambda z, M} + \tau_{\lambda z, 3, T} = 50.3 + 3.3 = 53.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

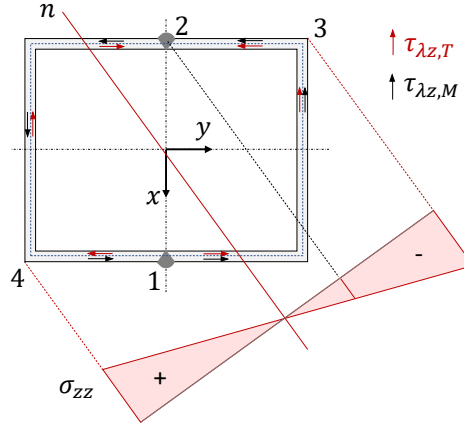


Figura 14: Stato di tensione sulla sezione d'incastro

La verifica a resistenza secondo il criterio di Von Mises:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau_{\lambda z}^2}$$

$$\sigma_{eq,2} = \sqrt{(-44.6)^2 + 3 \cdot 50.3^2} = 97.9 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi_W = \frac{\sigma_{amm,W}}{\sigma_{eq,2}} = 1.63$$

$$\sigma_{eq,3} = \sqrt{(-119.4)^2 + 3 \cdot 53.6^2} = 151.0 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{\sigma_{ys}}{\sigma_{eq,3}} = 1.82$$

La verifica a resistenza secondo il criterio di Tresca:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau_{\lambda z}^2}$$

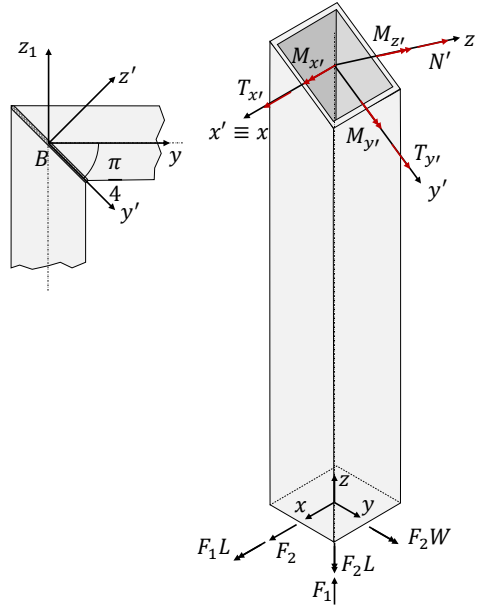
$$\sigma_{eq,2} = \sqrt{(-44.6)^2 + 4 \cdot 50.3^2} = 110.1 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi_W = \frac{\sigma_{amm,W}}{\sigma_{eq,2}} = 1.45$$

$$\sigma_{eq,3} = \sqrt{(-119.4)^2 + 4 \cdot 53.6^2} = 160.2 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{\sigma_{ys}}{\sigma_{eq,3}} = 1.72$$

Le specifiche sono rispettate in entrambe le verifiche.

Punto B: unione saldata

Il punto B è un punto in cui il metodo di De Saint Venant non potrebbe essere applicato a causa delle condizioni locali di brusca variazione di direzione. Per la verifica del giunto saldato nella pratica si adotta comunque questo approccio, benché impreciso, cautelandosi con un fattore di sicurezza maggiore per tener conto dell'inaccuratezza nel calcolo dello stato locale di tensione. Si procede quindi sezionando lungo il giunto in modo da evidenziare le azioni interne. Il sistema di riferimento è rappresentato dai due assi principali d'inerzia della sezione e dall'asse ortogonale alla sezione.

Figura 15: Azioni interne nel piano di saldatura nel punto B

$$N' = -F_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2475 \text{ N} \quad M_{z'} = F_2 L \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.97 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$T_{x'} = -F_2 = -3500 \text{ N} \quad M_{y'} = -F_2 L \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.97 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$T_{y'} = F_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2475 \text{ N} \quad M_{x'} = -F_1 L = -4.2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Proprietà geometriche della sezione di saldatura

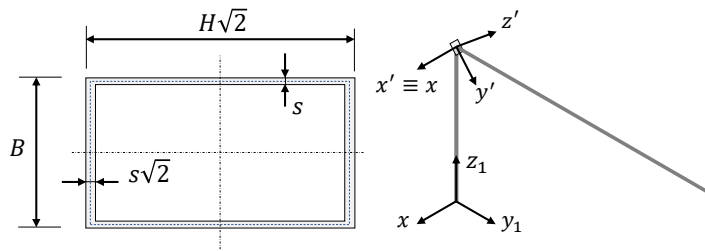


Figura 16: Caratteristiche geometriche della sezione saldata

$$A' = BH\sqrt{2} - (B - 2s)(H - 2s)\sqrt{2} = 2851 \text{ mm}^2$$

$$\Omega' = (B - s)(H - s)\sqrt{2} = 9837 \text{ mm}^2 \quad (\text{area media})$$

$$I_x' = \frac{BH^3 2\sqrt{2}}{12} - \frac{(B - 2s)(H - 2s)^3 2\sqrt{2}}{12} = 7.934 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y' = \frac{H\sqrt{2}B^3}{12} - \frac{(H-2s)\sqrt{2}(B-2s)^3}{12} = 2.774 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Ci si concentra sulle azioni di momento, visto che le altre azioni contribuiscono in modo minimale allo stato di tensione. Per l'analisi si considera quindi solo la flessione deviata e l'azione torsionale.

La tensione σ_{zz} e l'asse neutro n sono espressi da:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x'}{I_x'}y' - \frac{M_y'}{I_y'}x' = -0.529y' + 1.070x' \text{ MPa} \quad (\text{se } x, y \text{ in mm})$$

$$n: y' = 2.025x' \rightarrow \tan(\beta) = 2.025 \quad (\beta \approx 64^\circ)$$

I punti estremi per σ_{zz} sono $3'$ e $4'$:

$$3' : \left(-\frac{B}{2}, \frac{H}{\sqrt{2}}\right) = (-40, 50\sqrt{2}) \text{ mm} \quad 4' : \left(\frac{B}{2}, -\frac{H}{\sqrt{2}}\right) = (40, -50\sqrt{2}) \text{ mm}$$

$$\sigma_{zz,3'} = -0.529 \cdot 50\sqrt{2} + 1.070 \cdot (-40) = -80.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz,4'} = 0.529 \cdot 50\sqrt{2} + 1.070 \cdot (40) = 80.2 \text{ MPa}$$

La tensione dovuta a momento torcente:

$$\tau_{\lambda z,3'} = \tau_{\lambda z,4'} = \frac{M_z'}{2\Omega's} = \frac{2.97 \cdot 10^6}{2 \cdot 9.837 \cdot 6} = 25.15 \text{ MPa}$$

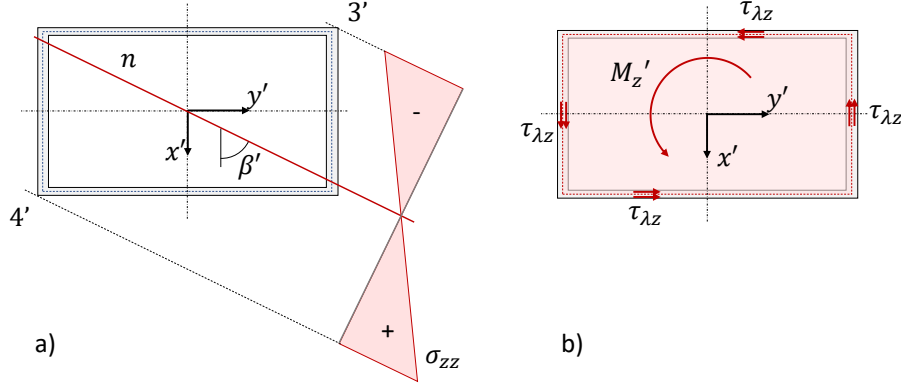


Figura 17: Componenti di tensione sulla sezione saldata: a) σ_{zz} , b) $\tau_{\lambda z}$

Per le verifiche di Tresca e di Von Mises i punti $3'$ e $4'$ sono isocritici.

$$\sigma_{eq,VM} = \sqrt{(80.2)^2 + 3 \cdot 25.5^2} = 91.3 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi_W = \frac{160}{91.3} = 1.75$$

$$\sigma_{eq,Tresca} = \sqrt{(80.2)^2 + 4 \cdot 25.5^2} = 95.0 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi_W = \frac{160}{91.3} = 1.68$$

Verifica a rigidezza

Si calcolano le tre componenti u , v , w di spostamento del centro della puleggia. Si utilizza il teorema di Castigliano sfruttando le forze F_1 e F_2 per calcolare gli spostamenti u e v . Per lo spostamento w si utilizza il metodo del carico ausiliario che conduce all'integrale di Mohr.

Tratto AB ($0 \leq z_1 \leq W$):

$$\begin{array}{lll}
 N = -F_1 & \frac{\partial N}{\partial F_1} = -1 & \frac{\partial N}{\partial F_2} = 0 \\
 M_x = -F_1 L & \frac{\partial M_x}{\partial F_1} = -L & \frac{\partial M_x}{\partial F_2} = 0 \\
 M_y = -F_2(W - z_1) & \frac{\partial M_y}{\partial F_1} = 0 & \frac{\partial M_y}{\partial F_2} = z_1 - W \\
 M_z = F_2 L & \frac{\partial M_z}{\partial F_1} = 0 & \frac{\partial M_z}{\partial F_2} = L
 \end{array}$$

Tratto BC ($0 \leq z_2 \leq L$):

$$\begin{array}{lll}
 N = 0 & \frac{\partial N}{\partial F_1} = 0 & \frac{\partial N}{\partial F_2} = 0 \\
 M_x = -F_1(L - z_2) & \frac{\partial M_x}{\partial F_1} = z_2 - L & \frac{\partial M_x}{\partial F_2} = 0 \\
 M_y = -F_2(L - z_2) & \frac{\partial M_y}{\partial F_1} = 0 & \frac{\partial M_y}{\partial F_2} = z_2 - L \\
 M_z = 0 & \frac{\partial M_z}{\partial F_1} = 0 & \frac{\partial M_z}{\partial F_2} = 0
 \end{array}$$

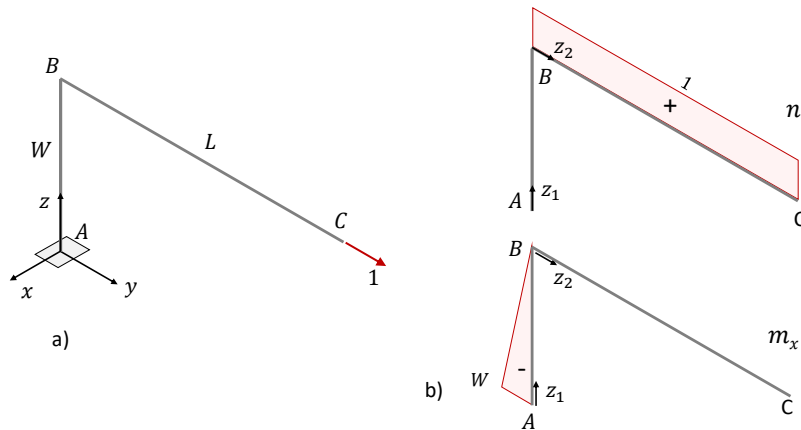
Carico ausiliario

Figura 18: a) Carico ausiliario, b) azioni interne a esso associate

$$\begin{array}{llll} n = 0 & 0 \leq z_1 \leq W & n = 1 & 0 \leq z_2 \leq L \\ m_x = z_1 - W & 0 \leq z_1 \leq W & m_x = 0 & 0 \leq z_2 \leq L \end{array}$$

Si considerano solo i termini attivi (derivate non nulle rispetto a F_1 e F_2):

$$v = \int_0^W \left(\frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F_1} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial F_1} \right) dz_1 + \int_0^L \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial F_1} dz_2$$

$$v = \int_0^W \left(\frac{F_1}{EA} + \frac{F_1 L^2}{EI_x} \right) dz_1 + \int_0^L \frac{F_1 (z_2 - L)^2}{EI_x} dz_2$$

$$v = \frac{F_1 W}{EA} + \frac{F_1 L^2 W}{EI_x} + \frac{F_1 L^3}{3EI_x} = 8.56 \text{ mm}$$

$$u = \int_0^W \left(\frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial F_2} + \frac{M_z}{GJ_T} \frac{\partial M_z}{\partial F_2} \right) dz_1 + \int_0^L \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial F_2} dz_2$$

$$u = \int_0^W \left(\frac{F_2 (z_1 - W)^2}{EI_y} + \frac{F_2 L^2}{GJ_T} \right) dz_1 + \int_0^L \frac{F_2 (z_2 - L)^2}{EI_y} dz_2$$

$$u = \frac{F_2 W^3}{3EI_y} + \frac{F_2 L^2 W}{GJ_T} + \frac{F_2 L^3}{3EI_y} = 16.34 \text{ mm}$$

$$w = \int_0^W \frac{M_x}{EI_x} m_x dz_1 = \int_0^W \frac{-F_1 L}{EI_x} (z_1 - W) dz_1 = \frac{F_1 L W^2}{2EI_x} = 1.28 \text{ mm}$$

$$\delta = \sqrt{16.34^2 + 8.56^2 + 1.28^2} = 18.5 \text{ mm} < \delta_{amm} = 20 \text{ mm}$$

Si nota che una notevole frazione dello spostamento u è dovuta allo spostamento rigido associato alla rotazione prodotta da torsione della parte verticale della struttura.

$$u_{Mz} = \frac{F_2 L^2 W}{GJ_T} = 10.34 \text{ mm}$$

Esempio 3: analisi strutturale di sezioni a parete sottile aperte e chiuse

Una trave, incastrata a un estremo, fa da supporto nella parte terminale a una piastra inclinata mediante un vincolo a cerniera. La piastra trasmette un'azione riconducibile a una forza concentrata nel centro del cuscinetto di vincolo. La trave è realizzata in lamiera piegata per formare in profilo rettangolare cavo. Si vogliono confrontare due possibili soluzioni costruttive: la lamiera viene saldata ai lembi estremi in modo da produrre una sezione chiusa, la lamiera viene solamente piegata in modo da formare una sezione con geometria simile, ma a profilo aperto.

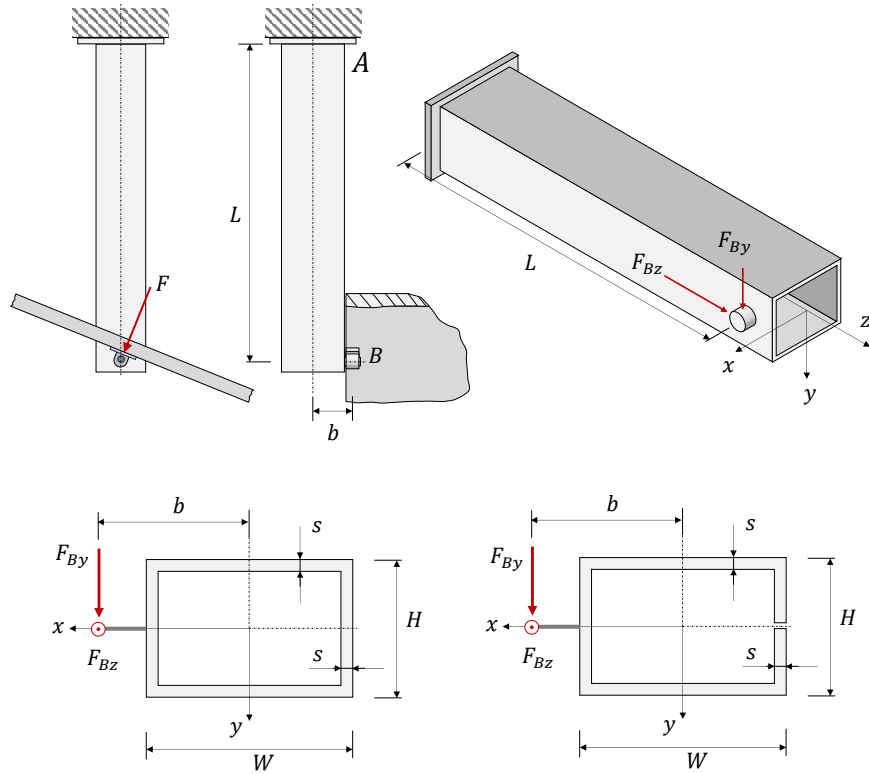


Figura 19: Trave di supporto di una piastra e geometria delle sezioni valutate

La specifica richiede un coefficiente di sicurezza allo snervamento $\phi_s = 1.5$ e spostamento ammissibile del punto di applicazione della forza $\delta_{amm} = 5 \text{ mm}$.

Dati del problema:

$L = 1500 \text{ mm}$	$F_{By} = 30 \text{ kN}$	$F_{Bz} = 75 \text{ kN}$	
$H = 210 \text{ mm}$	$W = 320 \text{ mm}$	$s = 6 \text{ mm}$	$b = 200 \text{ mm}$
$E = 210 \text{ GPa}$	$\nu = 0.3$	$\sigma_{ys} = 275 \text{ MPa}$	

Per l'analisi è conveniente ricondurre il carico a un sistema equivalente caratterizzato da azione normale passante per il baricentro e azione di taglio per il centro di taglio/torsione della sezione. Quest'ultima condizione differenzia le due sezioni, in quanto il centro di taglio della sezione chiusa coincide con il baricentro, mentre risulta spostato rispetto al baricentro per la sezione aperta. Come conseguenza cambia il momento torcente da considerare nell'analisi. A ciò si aggiunge la diversa modalità di risposta tenso-deformativa delle due sezioni a taglio e torsione. Le due sezioni hanno invece un comportamento analogo a trazione e momento flettente.

La trave a sezione chiusa

Proprietà geometriche della sezione.

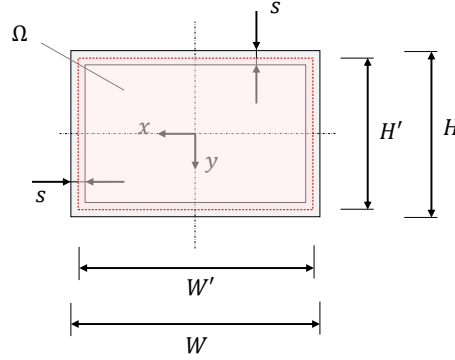


Figura 20: Geometria della sezione chiusa

$$W' = W - s = 314 \text{ mm}$$

$$H' = H - s = 204 \text{ mm}$$

$$A = WH - (W - 2s)(H - 2s) = 6216 \text{ mm}^2$$

$$\Omega = W'H' = 64056 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \frac{WH^3}{12} - \frac{(W - 2s)(H - 2s)^3}{12} = 4.773 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{HW^3}{12} - \frac{(H - 2s)(W - 2s)^3}{12} = 9.134 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_T = \frac{4 \Omega^2 s}{2(W' + H')} = 9.505 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

La riduzione al baricentro dell'azione tagliante e dell'azione normale comporta l'introduzione dei momenti M_{By} (flettente) e M_{Bz} (torcente), come rappresentato nello schema di corpo libero di figura 21.

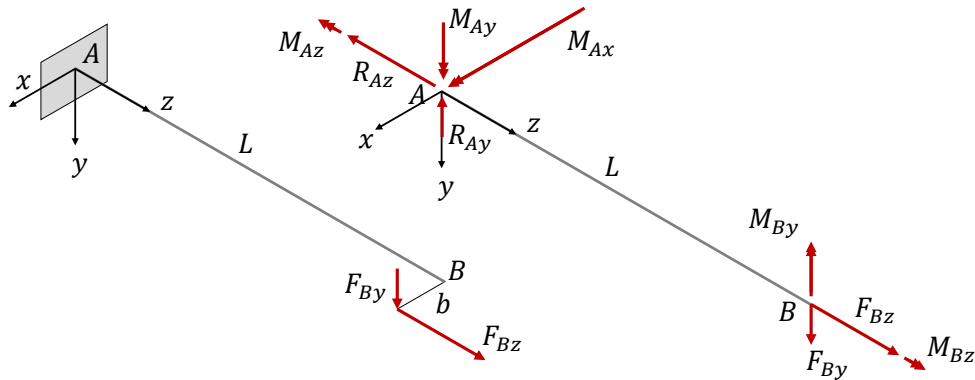


Figura 21: Modello d'analisi e schema di corpo libero per la trave a sezione chiusa

$$M_{By} = F_{Bz}b = 15.0 \text{ kNm}$$

$$M_{Bz} = F_{By}b = 6.0 \text{ kNm}$$

Reazioni vincolari in A

$$R_{Az} = F_{Bz} \quad R_{Ay} = F_{By} \quad M_{Ay} = M_{By} \quad M_{Az} = M_{Bz}$$

$$M_{Ax} = F_{By}L = 45 \text{ kNm}$$

Azioni interne e relativi diagrammi

$$N = R_{Az} = 75 \text{ kN} \quad T_y = R_{Ay} = 30 \text{ kN}$$

$$M_y = -M_{Ay} = -15.0 \text{ kNm} \quad M_z = M_{Az} = 6.0 \text{ kNm}$$

$$M_x = -M_{Ax} + R_{Ay}z = -F_{By}L \left(1 - \frac{z}{L}\right) = 45.0 \left(\frac{z}{1.5} - 1\right) \text{ kNm}$$

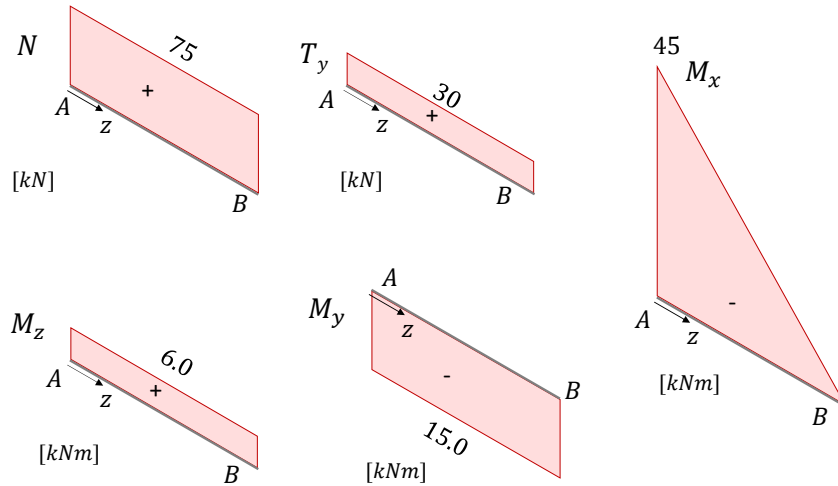


Figura 22: Diagrammi di azione interna

Il punto critico della trave è in corrispondenza della sezione d'incastro in cui sono presenti le seguenti azioni interne:

$$\begin{array}{llll} N = 75000 & T_y = 30000 & & [N] \\ M_x = -45.0 \cdot 10^6 & M_y = -15.0 \cdot 10^6 & M_z = 6.0 \cdot 10^6 & [Nmm] \end{array}$$

Asse momento e asse neutro della flessione deviata hanno coefficienti angolari positivi:

$$m : \quad \tan(\gamma) = \frac{M_y}{M_x} = \frac{1}{3} \quad n : \quad \tan(\beta) = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = 0.174$$

Di conseguenza, massimo e minimo della tensione normale si trovano negli spigoli della sezione posizionati nel secondo e quarto quadrante, le cui coordinate sono:

$$S_1 \left(\frac{W}{2}, -\frac{H}{2} \right) = (160, -105) \text{ mm} \quad S_2 \left(-\frac{W}{2}, \frac{H}{2} \right) = (-160, 105) \text{ mm}$$

L'equazione per la tensione normale σ_{zz} , i relativi valori di massimo e minimo, nonché l'equazione dell'asse neutro e le relative intercette con gli assi, esprimendo le lunghezze in mm e le tensioni in MPa , sono quindi:

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x \quad \rightarrow \quad \sigma_{zz} = 12.06 - 0.9429y + 0.1642x$$

$$\sigma_{zz,max} = 137.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz,min} = -113.2 \text{ MPa}$$

$$n : y = 0.174x + 12.80$$

$$x_0 = -73.5 \text{ mm}$$

$$y_0 = 12.80 \text{ mm}$$

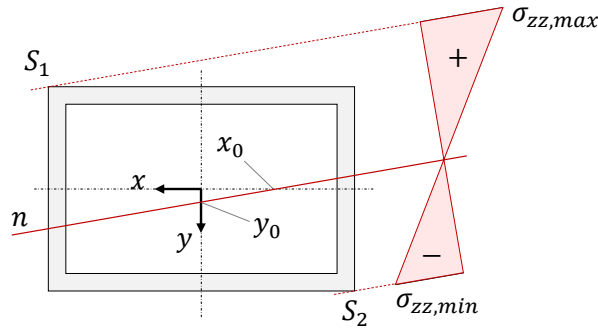


Figura 23: Tensione prodotta da azione normale e momento flettente

Il contributo del momento torcente alla tensione tangenziale si ottiene dalla prima relazione di Bredt:

$$\tau_{\lambda z} = \frac{M_z}{2\Omega_s} = \frac{6.0 \cdot 10^6}{2 \cdot 64056 \cdot 6} = 7.8 \text{ MPa}$$

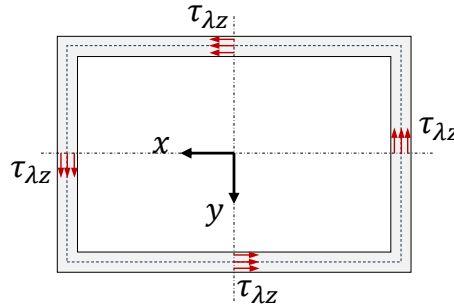


Figura 24: Tensione prodotta da momento torcente

Il contributo del taglio retto T_y si ottiene dalle relazioni per le sezioni chiuse simmetriche a parete sottile, per le quali il flusso di tensione si equiripartisce sui due rami. In figura sono riportati grafici riferiti alla linea media e le linee di flusso delle tensioni.

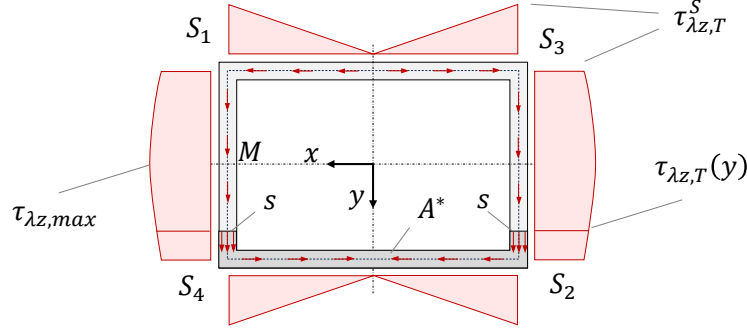


Figura 25: Tensione prodotta da taglio retto T_y

$$\tau_{\lambda z, T} = \frac{T_y S_x^*}{2 I_x s}$$

$$\tau_{\lambda z, T}^S = \frac{T_y}{2 I_x} \frac{W' H'}{2} = 10.1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\lambda z, T}(y) = \frac{T_y}{2 I_x} \left(\frac{W' H'}{2} + \frac{H'^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau_{\lambda z, max} = \frac{T_y}{2 I_x} \left(\frac{W' H'}{2} + \frac{H'^2}{4} \right) = 13.3 \text{ MPa}$$

Il modulo di $\tau_{\lambda z, T}^S$ è uguale in tutti gli spigoli S , il verso della tensione è indicato. Il punto critico per la verifica è lo spigolo S_1 dove è massima la tensione σ_{zz} e dove le azioni $\tau_{\lambda z}$ di momento torcente e di taglio si sommano algebricamente. Il punto M di massimo dell'azione $\tau_{\lambda z}$ è caratterizzato da valori modesti della tensione normale e verosimilmente non è critico per la resistenza. Si seguito si conduce la verifica di resistenza secondo Von Mises per i due punti S_1 e M .

Verifica di resistenza

Punto S_1 :

$$\sigma_{zz} = 137.3 \text{ MPa} \qquad \tau_{\lambda z} = \tau_{\lambda z, M_z}^S + \tau_{\lambda z, T}^S = 17.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau_{\lambda z}^2} = 140.7 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi_s = \frac{275}{140.7} = 1.95$$

Punto M:

$$\sigma_{zz} = 12.06 + 0.1642 \cdot 160 = 38.3 \quad \tau_{\lambda z, max} = 13.3 + 7.8 = 21.1 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau_{\lambda z}^2} = 53.0 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi_s = \frac{275}{53.0} = 5.19$$

Verifica di rigidità

La specifica pone un limite sul valore dello spostamento nel punto di applicazione della forza. Potendo applicare la sovrapposizione degli effetti si analizzano separatamente i vari contributi.

Azione normale: produce spostamento nella direzione dell'asse agevolmente calcolabile da:

$$w_N = \frac{NL}{EA} L = \frac{75000 \cdot 1500}{210000 \cdot 6216} = 0.086 \text{ mm}$$

Momento flettente: si tratta di flessione deviata, l'asse di flessione lungo il quale avviene lo spostamento è ortogonale all'asse neutro, si calcolano separatamente gli spostamenti u e v avvalendosi delle equazioni della linea elastica.

$$v'' = \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x} = \frac{F_{By}(L-z)}{EI_x}$$

$$v' = \frac{F_{By}}{EI_x} \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) + C_1$$

$$v = \frac{F_{By}}{EI_x} \left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C_1z + C_2$$

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \quad v'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$v = \frac{F_{By}}{EI_x} \left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \quad \rightarrow \quad v(L) = \frac{30000}{210000 \cdot 3.773 \cdot 10^7} \cdot \frac{1500^3}{3} = 3.37 \text{ mm}$$

$$u'' = \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{-M_{By}}{EI_x}$$

$$u' = \frac{-M_{By}}{EI_y} z + D_1$$

$$u = \frac{-M_{By}}{2EI_y} z^2 + D_1z + D_2$$

$$u(0) = 0 \quad \rightarrow \quad D_2 = 0 \quad v'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad D_1 = 0$$

$$u = \frac{-M_{By}}{2EI_y} z^2 \quad \rightarrow \quad u(L) = \frac{-15 \cdot 10^6}{2 \cdot 210000 \cdot 9.134 \cdot 10^7} \cdot 1500^2 = -0.88 \text{ mm}$$

La rotazione rigida prodotta dal momento M_y comporta uno spostamento w_{My} nel punto di applicazione della forza:

$$w_{My} = -u'(L) b = 0.23 \text{ mm}$$

Momento torcente: comporta rotazione rigida media e, come conseguenza, per il fatto che la forza non passa per il baricentro, spostamento nel piano. In particolare per l'ipotesi di piccoli spostamenti lo spostamento è ortogonale al raggio che congiunge baricentro e punto di applicazione della forza e avviene quindi in direzione y .

$$\theta_z(L) = \frac{M_z L}{G J_T} = \frac{6.0 \cdot 10^6 \cdot 1500}{80769 \cdot 9.505 \cdot 10^7} = 1.172 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_{Mz} = \theta_z(L) b = 0.23 \text{ mm}$$

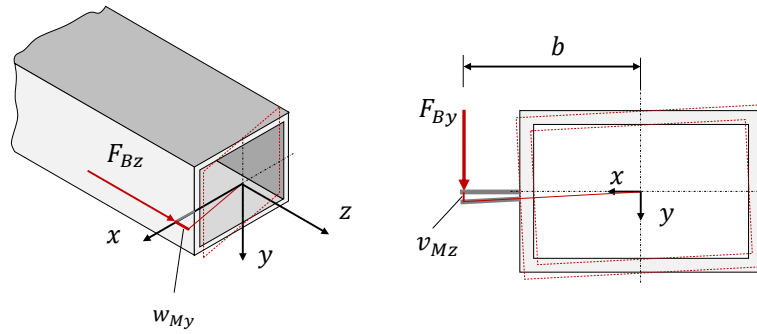


Figura 26: Spostamenti del punto di applicazione della forza dovuti a rotazioni rigide: a) momento flettente M_y , b) momento torcente M_z

Taglio retto: produce spostamento immediatamente calcolabile noto il fattore di rigidezza a taglio della sezione, per il calcolo del quale la sezione può essere trattata come le sezioni a parete sottile aperta, per le quali il fattore di rigidezza è con buona approssimazione desumibile dal rapporto tra l'area totale della sezione e l'area delle costole verticali (A_v) allineate con T_y .

$$\chi_y \approx \frac{A}{A_v} = \frac{A}{A - 2B s} = 2.62$$

$$v_{Ty} = \chi_y \frac{T_y L}{G A} = 2.62 \cdot \frac{30000 \cdot 1500}{80769 \cdot 6216} = 0.24 \text{ mm}$$

Si sommano ora algebricamente i valori calcolati per ognuna delle componenti u , v , w :

$$v = v_{Mx} + v_{Mz} + v_{Ty} = 3.37 + 0.23 + 0.24 = 3.84 \text{ mm}$$

$$u = -0.88 \text{ mm}$$

$$w = w_N + w_{My} = 0.09 + 0.23 = 0.32 \text{ mm}$$

Lo spostamento totale è:

$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 3.94 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad \delta < \delta_{amm} = 5 \text{ mm}$$

Il contributo dominante è quello dello spostamento in direzione y . Allo stesso risultato si giunge con l'applicazione del teorema di Castigliano, in particolare per lo spostamento y si deve derivare l'energia elastica rispetto alla forza F_{By} . Dalle espressioni delle azioni interne si ricava che N e M_y non dipendono da F_{By} .

$$v = \frac{\partial U_E}{\partial F_{By}} = \frac{\partial}{\partial F_{By}} \left[\int_0^L \left(\frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2GJ_T} + \frac{T_y^2}{2GA} \chi + \frac{N^2}{2EA} \right) dz \right]$$

$$v = \int_0^L \left(\frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial F_{By}} + \frac{M_z}{GJ_T} \frac{\partial M_z}{\partial F_{By}} + \chi \frac{T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial F_{By}} \right) dz$$

$$M_x = F_{By}(z - L) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_x}{\partial F_{By}} = z - L$$

$$M_z = F_{By}b \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_z}{\partial F_{By}} = b$$

$$T_y = F_{by} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_z}{\partial F_{By}} = 1$$

$$v = F_{By} \left(\frac{L^3}{3EI_x} + \frac{b^2L}{GJ_T} + \chi_y \frac{L}{GA} \right) = 3.84 \text{ mm}$$

In maniera analoga per lo spostamento w , notando che solo le azioni interne N e M_y dipendono da F_{Bz} :

$$w = \frac{\partial U_E}{\partial F_{Bz}} = \int_0^L \left(\frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial F_{Bz}} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F_{Bz}} \right) dz$$

$$M_y = -F_{Bz}b \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_y}{\partial F_{Bz}} = -b \quad N = F_{Bz} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial F_{Bz}} = 1$$

$$w = F_{Bz} \left(\frac{L}{EA} + \frac{b^2L}{EI_y} \right) = 0.32 \text{ mm}$$

Infine, per determinare lo spostamento u è necessario introdurre nel punto di applicazione della forza un carico ausiliario unitario in direzione z . Dall'integrale di Mohr si ricava il valore $u = -0.88 \text{ mm}$.

La trave a sezione aperta

L'analisi statica per il calcolo delle reazioni vincolari rimane invariata. Si deve invece porre attenzione alla riduzione delle forze applicate in modo da ottenere

uno schema equivalente in cui azione di taglio e di momento torcente risultino disaccoppiate. Il disaccoppiamento tra taglio e momento torcente si ottiene se il taglio T_y passa per il centro di taglio della sezione. Nel caso della sezione chiusa, con due assi di simmetria, baricentro e centro di taglio coincidono. Pertanto il taglio è stato ridotto allo schema equivalente di forza tagliante con retta d'azione passante per il baricentro e relativo momento torcente.

Con la sezione aperta il centro di taglio si trova sull'asse x , che rimane asse di simmetria, ma non nel baricentro. Esiste un'espressione approssimata che esprime l'eccentricità del centro di taglio rispetto al baricentro, in alternativa si procede al calcolo dalla coppia risultante prodotta dalle tensioni di Jourawsky, come precedentemente fatto per la sezione a C .

$$e = \frac{3W'(2W' + H')}{2(3W' + H')} = 341.95 \text{ mm}$$

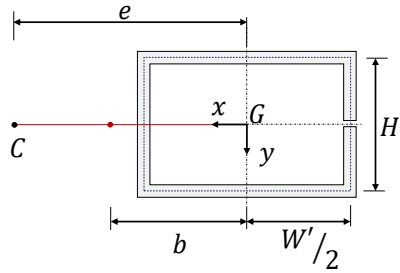


Figura 27: Eccentricità e del centro di taglio rispetto al baricentro e posizione b del punto di applicazione della forza

Sfruttando questo risultato si conduce l'analisi in base allo schema rappresentato in figura 28, che consente di determinare in modo disaccoppiato le tensioni dovute a taglio e momento torcente.

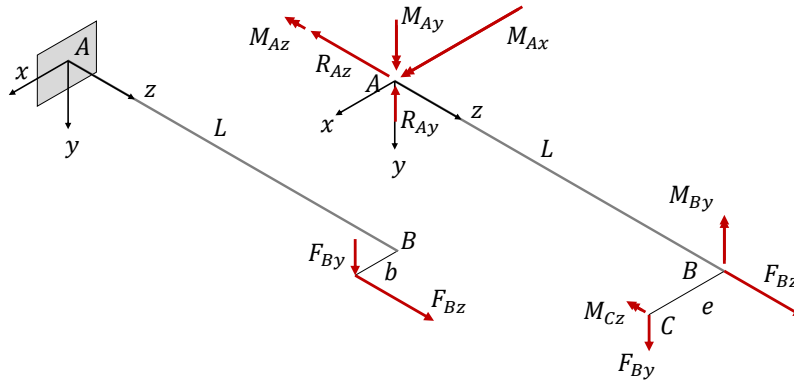


Figura 28: Schema equivalente per il calcolo disaccoppiato delle tensioni agenti sulla sezione

Le azioni interne N , M_x e M_y e T_y rimangono invariate, per l'azione M_z si fa riferimento allo schema seguente:

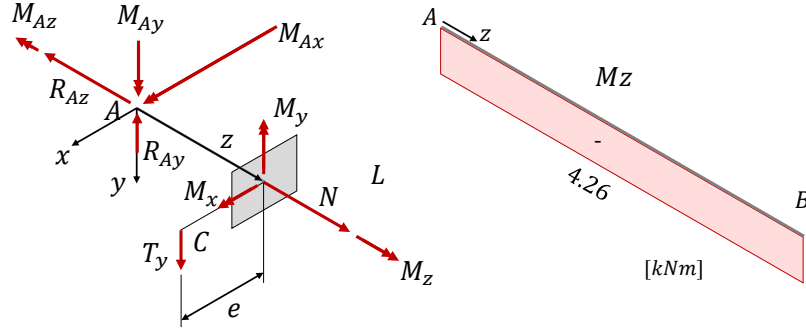


Figura 29: Schema per la determinazione delle azioni interne

$$\begin{aligned}
 N &= R_{Az} = F_{Bz} & T_y &= R_{Ay} = F_{By} & M_y &= -M_{Ay} = -F_{By}b \\
 M_x &= -M_{Ax} + R_{Ay}z = F_{By}(z - L) \\
 M_z &= M_{Az} - T_y e = F_{By}b - F_{By}e = -F_{By}(e - b) = -4.258 \cdot 10^6 \text{ Nmm}
 \end{aligned}$$

L'analisi che verrà svolta è puramente indicativa e non esaustiva perché per questo tipo di sezione (come quasi per tutte le sezioni a parete sottile aperta) l'ingobbamento è considerevole e all'incastro esso deve essere impedito dalla nascita di tensioni spurie σ_{zz} . Trascurando questo effetto si otterrà pertanto una sottostima del reale stato di tensione.

Tensioni normali σ_{zz}

L'analisi rimane invariata rispetto al caso della sezione chiusa perché le modifiche di momento d'inerzia sono del tutto trascurabili, soprattutto per il momento di inerzia I_x associato alla componente dominante di momento flettente.

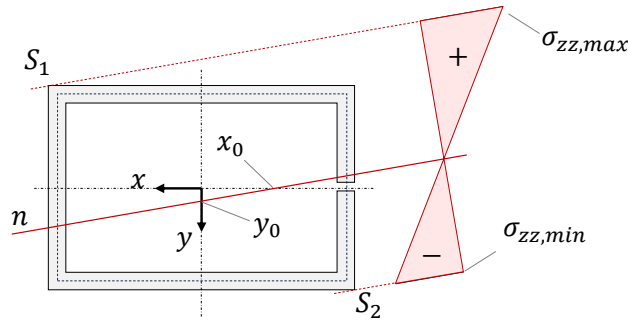


Figura 30: Tensione prodotta da azione normale e momento flettente

$$\sigma_{zz,max} = 137.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz,min} = -113.2 \text{ MPa}$$

Tensioni $\tau_{\lambda z}$ prodotte da momento torcente

Per il calcolo della tensione è necessario determinare il fattore di rigidità torsionale con la formula valida per le sezioni a parete sottile aperte. Le linee di flusso realizzano un percorso chiuso e l'andamento della tensione sullo spessore è triangolare. Il valore massimo si raggiunge sulla superficie ed è ampiamente maggiore della tensione critica del materiale.

$$J_T = \sum_i \frac{h_i s_i^3}{3} = \frac{(2W' + 2H') s^3}{3} = 74592 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\lambda z, \max} = \frac{M_z}{J_T} s = \frac{4.258 \cdot 10^6}{74592} \cdot 6 = 342.5 \text{ MPa}$$

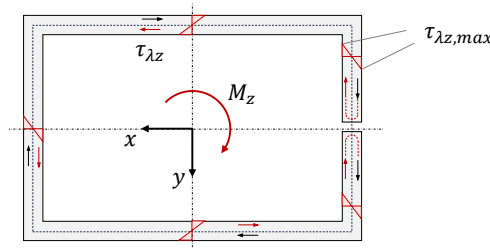


Figura 31: Tensione prodotta da momento torcente

Tensioni $\tau_{\lambda z}$ prodotte da azione tagliante

La distribuzione delle tensioni si ottiene con la formula di Jourawsky, ma la sezione non è più simmetrica.

Le linee di flusso delle tensioni realizzano un percorso aperto lungo lo sviluppo della sezione. Per l'ipotesi alla base della teoria di Jourawsky, le tensioni sono costanti sullo spessore.

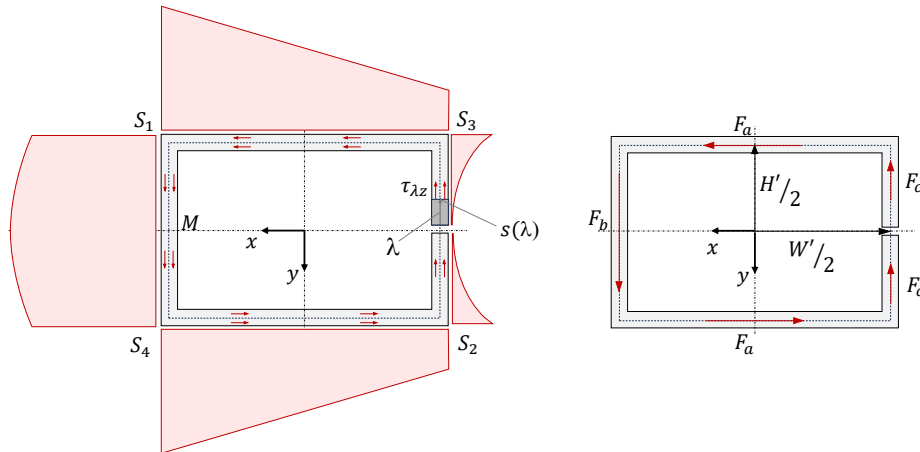


Figura 32: Tensione prodotta da azione tagliante e relativa forza risultante su ogni tratto

$$\tau_{\lambda z, S3} = \tau_{\lambda z, S2} = \frac{T_y H'^2}{8I_x} = 3.27 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\lambda z, S1} = \tau_{\lambda z, S4} = 3.27 + \frac{T_y H' W'}{2I_x} = 23.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\lambda z, M} = 23.4 + T_y \frac{H'^2}{8I_x} = 26.7 \text{ MPa}$$

In figura sono rappresentate anche le forze risultanti su ogni costola dovute alle azioni tangenziali. Per rispettare le condizioni di equivalenza statica:

$$F_b - 2F_c = T_Y \quad F_a H' + F_b \frac{W'}{2} + 2F_c \frac{W'}{2} = F_{By} e$$

Tensione complessiva: per le azioni tangenziali i punti critici sono all'intradosso nelle posizioni S_1 e M dove le tensioni dovute a momento torcente e a taglio si sommano algebricamente. La tensione equivalente secondo il criterio di Von Mises è massima nel punto S_1 . Per cui:

$$\tau_{\lambda z, max, S1} = 342.5 + 23.4 = 365.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eq, S1} = \sqrt{137.3^2 + 3 \cdot 365.9^2} = 648.5 > \sigma_{amm} = \frac{275}{1.5} = 183.3 \text{ MPa}$$

Per rientrare nei limiti di resistenza è necessario scalare la forza applicata $F = \sqrt{F_{By}^2 + F_{Bz}^2} = 80777 \text{ N}$ fino a che $\sigma_{eq} \leq \sigma_{amm}$.

Tutte le azioni interne sono funzione lineare della forza applicata e conseguentemente anche σ_{eq} è linearmente dipendente da F . Dovrà essere quindi:

$$F_{tol} = F \frac{\sigma_{amm}}{\sigma_{eq}} = 80.777 \cdot \frac{275}{1.5 \cdot 648.5} = 22838 \text{ N}$$

Come già anticipato non si tiene conto delle tensioni spurie dovute a ingobbamento impedito che produrrebbero un ulteriore declassamento.

Dopo diminuzione della forza fino a F_{tol} non è detto che la struttura soddisfi le specifiche di rigidezza, perché il fattore di rigidezza torsionale della trave è molto ridotto rispetto a quello della sezione chiusa. Gli altri contributi dovuti ad azione normale, momento flettente e taglio si calcolano più o meno con le stesse relazioni e scalano quindi nel rapporto tra la forza F e la forza F_{tol} .

Per il contributo del momento torcente si devono tener presenti due aspetti fondamentali: il fattore di rigidezza J_t cambia considerevolmente, la rotazione media avviene intono all'asse che passa per il centro di taglio. Lo spostamento del punto di applicazione della forza si calcola di conseguenza.

$$\eta = \frac{F_{tol}}{F} = 0.283 \quad \rightarrow \quad M_{z,tol} = \eta M_z = -1.204 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\theta_{z,tol} = \frac{M_{z,tol} L}{G J_t} = -\frac{1.204 \cdot 10^6 \cdot 1500}{80769 \cdot 74592} = -0.300 \text{ rad } (\approx 17.2^\circ)$$

$$v_{Mz,tol} \approx \theta_{z,tol}(b - e) = 0.300 \cdot 141.95 = 42.5 \text{ mm}$$

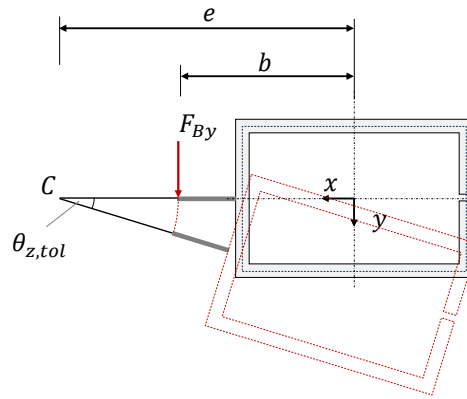


Figura 33: Deformata dovuta a torsione

Il valore ottenuto è ben oltre lo spostamento ammissibile. In questo caso gli effetti spuri dovuti all'ingobbamento impedito vengono in aiuto perché producono un significativo effetto di irrigidimento della trave.

Quest'analisi fa capire come in presenza di torsione l'uso di sezioni aperte sia estremamente svantaggioso, la sezione chiusa regge perfettamente l'azione di F , mentre per la sezione aperta, a parità di materiale usato, per rientrare nelle specifiche è necessario diminuire la forza di almeno un ordine di grandezza.

Ove possibile è opportuno far passare la forza per il centro di taglio per eliminare completamente l'effetto spurio. Nel caso in esame lo spostamento delle forza nel centro di taglio avrebbe tuttavia un effetto peggiorativo sul momento M_y perché cambierebbe il braccio della forza F_{Bz} rispetto al baricentro.

Esempio 4: braccio del sistema di mescolamento di un fluido

Per movimentare il fluido contenuto in un recipiente cilindrico, si adotta la soluzione di un braccio orizzontale fissato a un albero che ruota, coassiale all'asse del recipiente. Il braccio è appoggiato all'altro estremo mediante un carrello sul bordo del recipiente. Il carrello impedisce lo spostamento verticale e la rotazione torsionale del braccio. Sul braccio sono montate due pale, sulle quali si esplica l'azione resistente del fluido, proporzionale alla velocità periferica e diretta ortogonalmente al raggio della traiettoria circolare del moto.

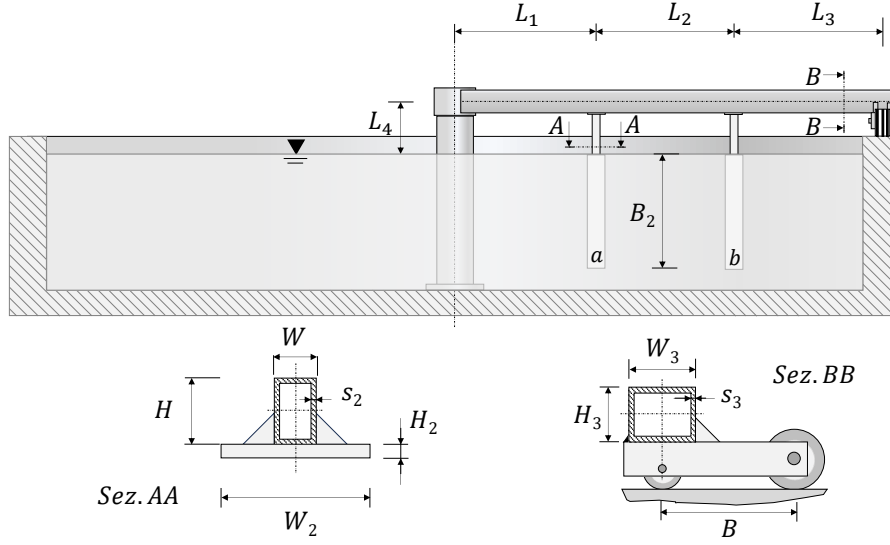


Figura 34: Geometria del telaio di supporto alle pale

Si considera l'albero verticale come infinitamente rigido rispetto al braccio e quindi tale da svolgere la funzione di telaio. Dalla potenza assorbita a regime si desume la potenza P dissipata per la resistenza del fluido. La rotazione avviene in verso orario alla velocità n . Il materiale utilizzato è acciaio inox.

Si richiede la verifica a resistenza della trave e il dimensionamento dei profilati cavi rettangolari da usare per il supporto alle pale, assumendo in entrambi i casi il coefficiente di sicurezza a snervamento ϕ_s .

Dati del problema:

$L_1 = 1400 \text{ mm}$	$L_2 = 1200 \text{ mm}$	$L_3 = 1400 \text{ mm}$	$L_4 = 375 \text{ mm}$
$B_2 = 1200 \text{ mm}$	$W_2 = 125 \text{ mm}$	$H_2 = 6 \text{ mm}$	
$W_3 = 200 \text{ mm}$	$H_3 = 150 \text{ mm}$	$s_3 = 5 \text{ mm}$	$B = 450 \text{ mm}$
$E = 195 \text{ GPa}$	$\sigma_{ys} = 220 \text{ MPa}$	$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$	
$P = 7.5 \text{ kW}$	$n = 4 \text{ giri/min}$	$\phi_s = 1.5$	
Densità del fluido:		$\rho_f = 850 \text{ kg/m}^3$	

L'azione sulle pale si desume dalla potenza trasmessa P e dalla coppia motrice necessaria per mantenere il sistema in movimento.

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 0.4189 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad M_t = \frac{P}{\omega} = 17905 \text{ Nm}$$

Le azioni agenti sono proporzionali alla velocità periferica e di conseguenza al raggio della traiettoria circolare di ogni pala. Definiti $r_a = L_1$ e $r_b = L_1 + L_2$, le forze risultanti sulle pale si esprimono:

$$F_a = kr_a \quad F_b = kr_b$$

Dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse dell'albero si ottiene:

$$M_t = F_a r_a + F_b r_b = k (r_a^2 + r_b^2) \quad \rightarrow \quad k = 2053.32 \frac{N}{m}$$

$$F_a = k r_a = 2875 \text{ N} \quad F_b = k r_b = 5339 \text{ N}$$

La pressione sulle pale è approssimativamente uniforme poiché per la dimensione della pala è lecito assumere che l'intera pala si muova alla stessa velocità periferica. Il centro di spinta a cui ridurre la spinta risultante del fluido è a metà dell'altezza della parte immersa.

Le travi verticali sono incastrate alla trave principale e sono soggette a momento flettente, che raggiunge il valore massimo in corrispondenza dell'incastro. L'azione flettente è l'azione dominante.

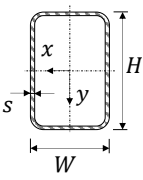
$$M_{fa} = F_a \left(L_4 + \frac{B_2}{2} - \frac{H_3}{2} \right) = 2587 \text{ Nm} \quad M_{fb} = M_{fb} \frac{F_b}{F_a} = 4805 \text{ Nm}$$

Si procede quindi alla scelta del profilato rettangolare cavo desumendo il modulo di resistenza richiesto:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_f}{W_r} \leq \frac{\sigma_{ys}}{\phi_s}$$

$$W_{ra} = \frac{M_{fa} \phi_s}{\sigma_{ys}} = 17640 \text{ mm}^3$$

$$W_{rb} = \frac{M_{fb} \phi_s}{\sigma_{ys}} = 32760 \text{ mm}^3$$



HxW mm	s mm	Peso kg/m	Sezione mm ²	I _x mm ⁴	I _y mm ⁴	W _x mm ³	W _y mm ³
....							
80x40	2.0	3.64	464	38.97 · 10 ⁴	13.12 · 10 ⁴	9.74 · 10 ³	6.56 · 10 ³
	3.0	5.37	684	55.85 · 10 ⁴	18.43 · 10 ⁴	13.96 · 10 ³	9.21 · 10 ³
	4.0	7.03	896	71.13 · 10 ⁴	23.01 · 10 ⁴	17.78 · 10 ³	11.80 · 10 ³
80x60	2.0	4.27	544	51.14 · 10 ⁴	32.78 · 10 ⁴	12.79 · 10 ³	10.93 · 10 ³
	3.0	6.31	804	73.65 · 10 ⁴	46.90 · 10 ⁴	18.41 · 10 ³	15.63 · 10 ³
	4.0	8.29	1056	94.26 · 10 ⁴	59.64 · 10 ⁴	23.56 · 10 ³	19.88 · 10 ³
....							
120x40	2.0	4.90	624	107.73 · 10 ⁴	18.90 · 10 ⁴	17.96 · 10 ³	9.45 · 10 ³
	3.0	7.25	924	155.23 · 10 ⁴	26.66 · 10 ⁴	26.04 · 10 ³	13.33 · 10 ³
	4.0	9.55	1216	201.37 · 10 ⁴	33.42 · 10 ⁴	33.56 · 10 ³	16.71 · 10 ³
	5.0	11.78	1500	243.25 · 10 ⁴	39.25 · 10 ⁴	40.54 · 10 ³	19.63 · 10 ³
120x60	2.0	5.53	704	135.58 · 10 ⁴	46.24 · 10 ⁴	22.60 · 10 ³	15.41 · 10 ³
	3.0	8.20	1044	197.31 · 10 ⁴	66.41 · 10 ⁴	32.88 · 10 ³	22.14 · 10 ³
	4.0	10.80	1376	255.20 · 10 ⁴	84.77 · 10 ⁴	42.53 · 10 ³	28.26 · 10 ³
	5.0	13.35	1700	309.42 · 10 ⁴	101.42 · 10 ⁴	51.57 · 10 ³	33.81 · 10 ³
....							

Figura 35: Estratto dalle tabelle per i profilati rettangolari cavi

Dalle tabelle dei profili, di cui in figura 34 è riportato un estratto, si scelgono i profili $80 \times 60 \times 3$ e $120 \times 60 \times 3$ che soddisfano alle condizioni stabilite con peso minore rispetto agli altri profili.

Prima di procedere è opportuno valutare il valore del peso della struttura rispetto alle altre azioni. Per le travi verticali si usano i dati riportati in tabella relativi alle sezioni resistenti e alla massa per unità di lunghezza.

$$\text{Trave : } P_t = \rho(W_3 - 2s)(H_3 - 2s)(L_1 + L_2 + L_3) \quad g = 1068 \text{ N}$$

$$\text{Pale : } p_p = 2g(\rho - \rho_f)B_2W_2H_2 = 126 \text{ N}$$

$$\text{Trave a : } p_a = g \left[6.31 \cdot \left(L_4 + B_2 - \frac{H_3}{2} \right) - 804 \cdot 10^{-6} \cdot \rho_f B_2 \right] = 80 \text{ N}$$

$$\text{Trave b : } p_b = g \left[8.20 \cdot \left(L_4 + B_2 - \frac{H_3}{2} \right) - 1044 \cdot 10^{-6} \cdot \rho_f B_2 \right] = 104 \text{ N}$$

I valori in gioco sono significativamente minori di quelli dovuti all'azione del fluido. In condizioni molto cautelative, se l'intero peso fosse applicato in mezzzeria e il carrello non fosse attivo, si avrebbe un momento all'incastro $M_{Ax} \approx 1400 \cdot 2 = 2800 \text{ Nm}$ circa il 15% rispetto al momento nell'altro piano. Il valore è in realtà ancora minore perché il carico principale è distribuito e il carrello funge da supporto iperstatico. Di seguito il calcolo verrà svolto per completezza, pur attendendosi un'incidenza modesta sui risultati.

L'attenzione si sposta ora alla trave principale, le azioni trasferite dal fluido agli elementi verticali sono riportate come forze generalizzate concentrate in corrispondenza della giunzione con la trave principale. Il carrello terminale impedisce lo spostamento verticale e la rotazione della trave intorno all'asse z : si introducono le conseguenti reazioni nel punto terminale della trave (C).

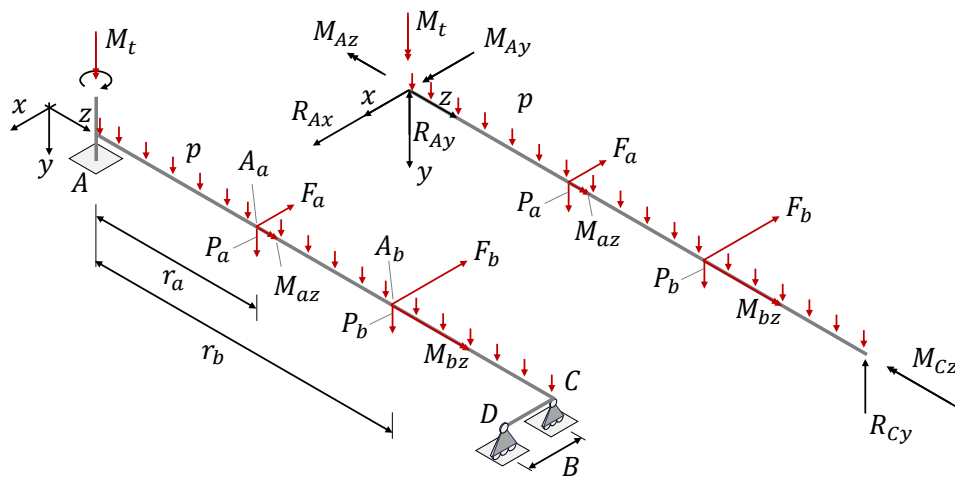


Figura 36: Modello d'analisi e schema di corpo libero

Il sistema è labile ma in equilibrio dinamico nel piano $x - z$, il carrello terminale esprime condizione di vincolo ridodante rispetto all'azione torcente intorno all'asse z e allo spostamento verticale in direzione y . I due gradi di iperstaticità sono trattabili in modo disaccoppiato.

Piano $x - z$

$$R_{Ax} = F_a + F_b = 8213 \text{ N} \quad M_t = F_a r_a + F_b r_b = 17.905 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_y = \begin{cases} -M_t + (F_a + F_b)z & 0 \leq z \leq r_a \\ -M_t + F_a r_a + F_b z & r_a \leq z \leq r_b \\ 0 & r_b \leq z \leq L \end{cases} \quad (L = L_1 + L_2 + L_3)$$

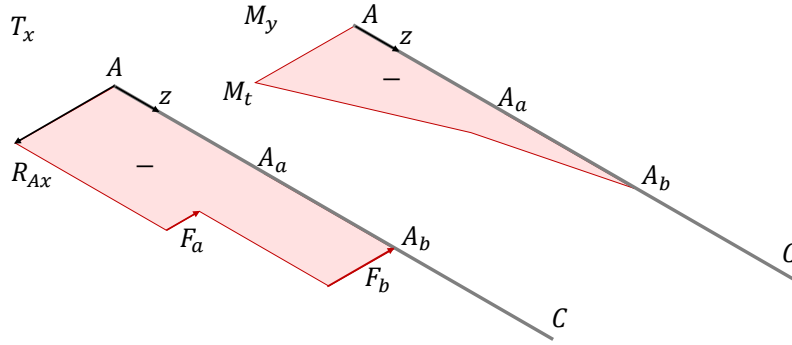


Figura 37: Azioni interne nel piano $x - z$

Piano $y - z$

$$p = \rho (W_3 - 2s)(H_3 - 2s)g = 0.2668 \text{ N/mm}$$

$$P_a = \frac{p_p}{2} + p_a = 143 \text{ N} \quad P_b = \frac{p_p}{2} + p_b = 167 \text{ N}$$

Sistema 0:

$$M_x = \begin{cases} -P_a(r_a - z) - P_b(r_b - z) - \frac{p}{2}(L - z)^2 & 0 \leq z \leq r_a \\ -P_b(r_b - z) - \frac{p}{2}(L - z)^2 & r_a \leq z \leq r_b \\ -\frac{p}{2}(L - z)^2 & r_b \leq z \leq L \end{cases}$$

Sistema 1:

$$m_x = L - z \quad 0 \leq z \leq L$$

L'integrale risolutivo:

$$0 = \frac{1}{EI_x} \left[\int_0^{r_a} -P_a(r_a - z)(L - z)dz + \int_0^{r_b} -P_b(r_b - z)(L - z)dz \right] + \frac{1}{EI_x} \left[\int_0^L -\frac{p(L - z)^3}{2}dz + X \int_0^L (L - z)^2 dz \right]$$

$$\frac{XL^3}{3} = P_b \left(\frac{L r_b^2}{2} - \frac{r_b^3}{6} \right) + P_a \left(\frac{L r_a^2}{2} - \frac{r_a^3}{6} \right) + \frac{pL^4}{8} \quad \rightarrow \quad X = 527 \text{ N}$$

Le reazioni vincolari in base allo schema di corpo libero di figura 36:

$$R_{Ay} = P_a + P_b + pL - X \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = 852 \text{ N}$$

$$M_{Ax} = P_a r_a + P_b r_b + \frac{pL^2}{2} - XL \quad \rightarrow \quad M_{Ax} = 664694 \text{ Nmm}$$

$$R_{Cy} = X = 527 \text{ N}$$

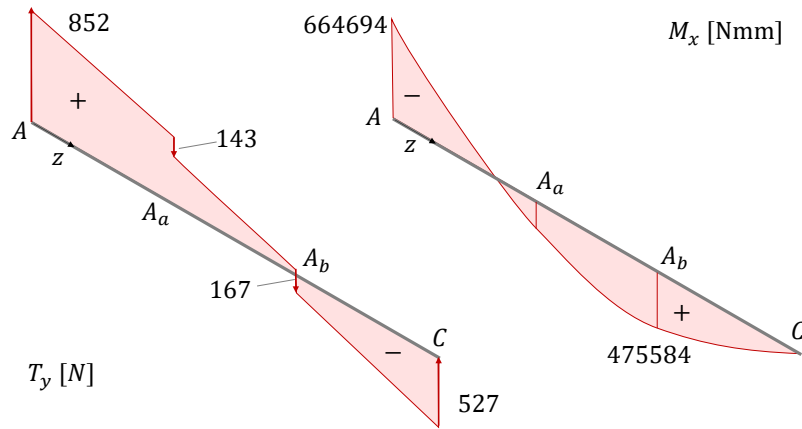


Figura 38: Azioni interne nel piano $y - z$

Momento torcente

Invece di procedere con il metodo standard si applica in questo caso il principio di sovrapposizione degli effetti. Il problema iperstatico con momento applicato in un punto interno della trave è stato già risolto nel capitolo 10. Si utilizza questa soluzione e si sovrappongono gli effetti dei due momenti applicati in A_a e A_b :

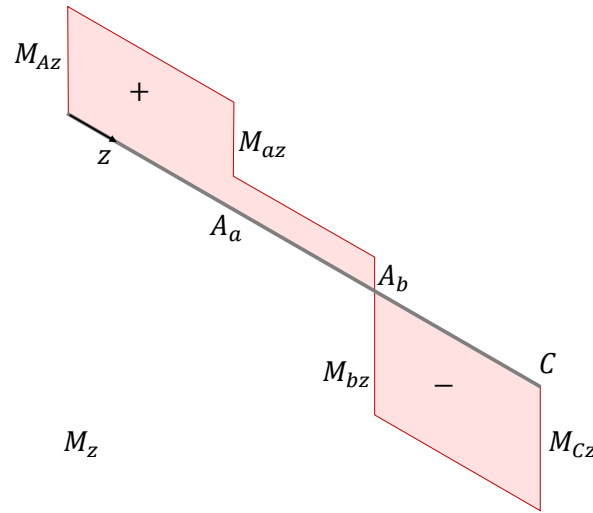
$$M_{az} = F_a \left(\frac{B_2}{2} + L_4 \right) = 2802779 \text{ Nmm} \quad M_{bz} = M_{az} \frac{F_b}{F_a} = 5205161 \text{ Nmm}$$

$$M_{Az,a} = M_{az} \frac{L - r_a}{L} \quad M_{Cz,a} = M_{az} \frac{r_a}{L}$$

$$M_{Az,b} = M_{bz} \frac{L - r_b}{L} \quad M_{Cz,b} = M_{bz} \frac{r_b}{L}$$

$$M_{Az} = M_{Az,a} + M_{Az,b} = M_{az} \frac{L - r_a}{L} + M_{bz} \frac{L - r_b}{L} = 3643612 \text{ Nmm}$$

$$M_{Cz} = M_{Cz,a} + M_{Cz,b} = M_{az} \frac{r_a}{L} + M_{bz} \frac{r_b}{L} = 4364627$$

Figura 39: Azioni interne M_z **Verifica a snervamento**

La sezione più critica della trave è quella d'incastro, in cui sono presenti le seguenti azioni interne:

$$M_x = -664694 \text{ Nmm} \quad M_y = -17904931 \text{ Nmm} \quad M_z = 3643612 \text{ Nmm}$$

Le proprietà geometriche della sezione:

$$\Omega = (W_3 - s_3)(H_3 - s_3) = 28275 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \frac{W_3^3 H_3}{12} - \frac{(W_3 - 2s_3)^3 (H_3 - 2s_3)}{12} = 1.28033 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{W_3 H_3^3}{12} - \frac{(W_3 - 2s_3)(H_3 - 2s_3)^3}{12} = 1.99783 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Da cui, esprimendo le lunghezze in mm e le forze in N :

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x = -0.051916 \cdot y + 0.89622 \cdot x \quad \rightarrow \quad n : y = 17.263 \cdot x$$

$$\text{Punti critici: } P_1 \left(\frac{H_3}{2}, -\frac{W_3}{2} \right) \quad P_2 \left(-\frac{H_3}{2}, \frac{W_3}{2} \right)$$

$$\sigma_{zz,max} = 93.5 \text{ MPa} \quad \tau_{\lambda z} = \frac{M_z}{2\Omega s_3} = 12.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eq,VM} = \sqrt{\sigma_{zz,max}^2 + 3\tau_{\lambda z}^2} = 96.1 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi_s = \frac{220}{76.5} = 2.29$$

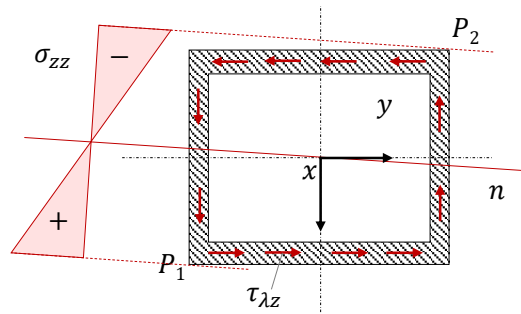


Figura 40: Rappresentazione delle tensioni sulla sezione critica

Esempio 5: albero di trasmissione

Si considera l'albero di una fresa rappresentato in figura 41, comandato da una coppia di ingranaggi conici a denti diritti; le forze applicate sulla ruota conica solidale all'albero sono indicate in figura. La reazione del pezzo sull'utensile si può schematizzare come azione distribuita uniforme, tangente alla superficie esterna dell'utensile.

L'albero è vincolato al telaio mediante una coppia di cuscinetti, dei quali l'inferiore funziona da cerniera e il superiore da carrello libero assialmente. Lungo l'albero sono presenti variazioni di sezione raccordate, il cui raggio di raccordo non è quotato a disegno.

Si richiedono le verifiche di resistenza a snervamento secondo il criterio di Von Mises e la verifica di rigidezza. In particolare si devono verificare l'inclinazione dell'albero all'ingranaggio e lo spostamento nel punto di calettamento dell'utensile.

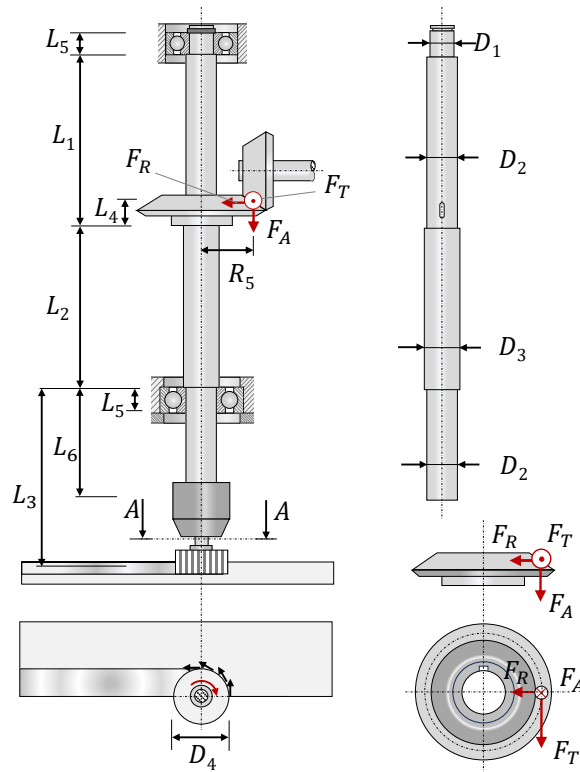


Figura 41: Albero di comando di un mandrino

Dati del problema:

$L_1 = 190 \text{ mm}$	$L_2 = 180 \text{ mm}$	$L_3 = 220 \text{ mm}$	$L_4 = 30 \text{ mm}$
$L_5 = 20 \text{ mm}$	$L_6 = 110 \text{ mm}$	$R_5 = 50 \text{ mm}$	$D_4 = 60 \text{ mm}$
$D_1 = 34 \text{ mm}$	$D_2 = 37 \text{ mm}$	$D_3 = 40 \text{ mm}$	
Raggi di raccordo non quotati:		$r = 1.5 \text{ mm}$	
Materiale:		$E = 210 \text{ GPa}$	$\nu = 0.3$
			$\sigma_{ys} = 560 \text{ MPa}$
Potenza assorbita:	$P = 9000 \text{ W}$	Velocità di rotazione:	$n = 1000 \text{ giri/min}$
$F_A = 0.352 \cdot F_T$	$F_R = 0.090 \cdot F_T$		

Le specifiche per la verifica sono le seguenti:

Fattore di sicurezza a snervamento:	$\phi_s = 2$
Inclinazione alla ruota:	$\theta_{amm} = 0.0010 \text{ rad}$
Spostamento al mandrino (quota L_6)	$\delta_{amm} = 0.08 \text{ mm}$

Il modello di analisi del problema è rappresentato in figura 42. Si considerano le azioni esterne concentrate rispettivamente: a metà altezza dei cuscinetti, nel punto di contatto sulla primitiva per le ruote, a metà altezza della fresa.

Conviene quindi definire le seguenti grandezze:

$$\begin{aligned} a &= L_1 - L_4 + \frac{L_5}{2} = 170 \text{ mm} & b &= L_2 + \frac{L_4 + L_5}{2} = 205 \text{ mm} \\ c &= L_3 - \frac{L_5}{2} = 210 \text{ mm} & d &= L_6 - \frac{L_5}{2} = 100 \text{ mm} \end{aligned}$$

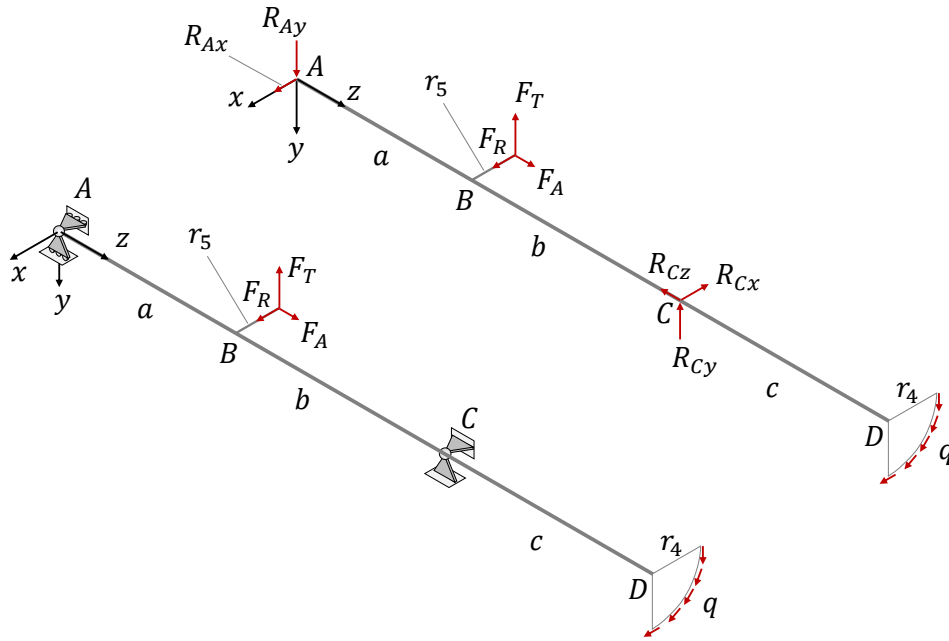


Figura 42: Modello di analisi e schema di corpo libero

La coppia trasmessa, la forza F_T e le conseguenti azioni F_A e F_R si desumono dai dati di potenza assorbita e velocità di rotazione:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi n}{60} = 104.72 \text{ rad/s} & M_t &= \frac{P}{\omega} = 85943.7 \text{ Nmm} \\ F_T &= \frac{M_t}{r_5} = 1719 \text{ N} \\ F_A &= 0.352 F_T = 605 \text{ N} \\ F_R &= 0.090 F_T = 155 \text{ N} \end{aligned}$$

Ipotizzando trascurabili eventuali perdite per effetti dissipativi, la coppia torcente è contrastata dalla reazione all'utensile, rappresentata dall'azione di linea q . In figura è rappresentato lo schema per il calcolo di q e delle azioni trasmesse all'albero.

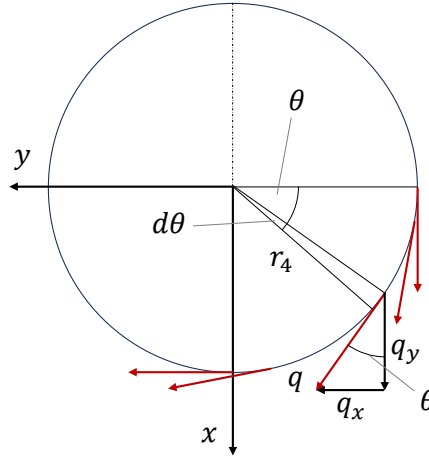


Figura 43: Azioni di taglio trasmesse alla fresa

L'azione q è distribuita lungo l'arco compreso tra $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, ogni contributo elementare al momento torcente è allineato con l'asse z , si può quindi integrare lungo l'arco.

Per calcolare la forza risultante è necessario scomporre nelle due componenti q_x e q_y e integrare ognuna delle due sull'arco per ottenere le forze risultanti Q_x e Q_y .

$$M_t = \int_0^{\pi/2} q r_4^2 d\theta = \frac{\pi q r_4^2}{2} \quad \rightarrow \quad q = \frac{2M_t}{\pi r_4^2}$$

$$Q_x = \int_0^{\pi/2} q r_4 \sin(\theta) d\theta = q r_4 \quad Q_y = \int_0^{\pi/2} q r_4 \cos(\theta) d\theta = q r_4$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = q r_4 \sqrt{2}$$

$$r_Q = \frac{M_t}{Q} = \frac{\pi r_4}{2\sqrt{2}}$$

La risultante Q è inclinata $\pi/4$ e la retta d'azione è distante r_Q dal centro. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$q = 60.793 \text{ N/mm} \quad Q_x = Q_y = 1824 \text{ N}$$

Per l'analisi delle reazioni vincolari è comodo ridurre il sistema di azioni esterne applicate come azioni equivalenti concentrate all'albero.

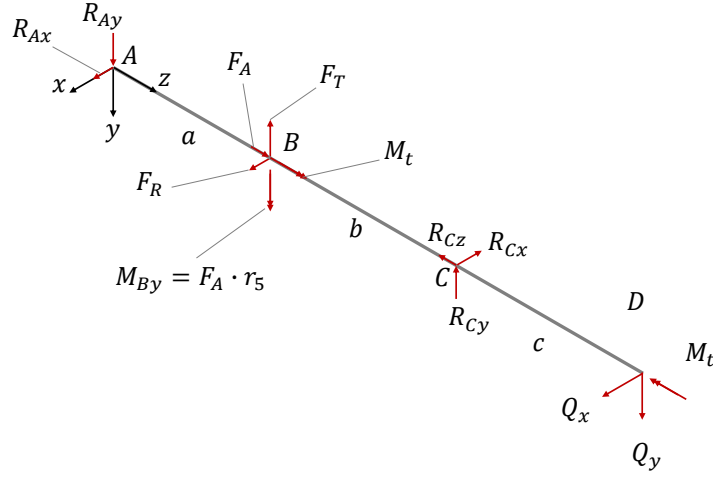


Figura 44: Schema di corpo libero dell'albero

$$\begin{aligned}
 R_{Ay} &= \frac{F_T b + Q_y c}{a + b} & R_{Cy} &= \frac{Q_y(a + b + c) - F_T a}{a + b} \\
 R_{Ax} &= \frac{M_{By} + Q_x c - F_R b}{a + b} & R_{Cx} &= \frac{M_{By} + Q_x(a + b + c) + F_R a}{a + b} \\
 R_{Cz} &= F_A
 \end{aligned}$$

Dopo aver sostituito i valori numerici si ottiene:

$$\begin{aligned}
 R_{Ay} &= 1961 \text{ N} & R_{Ax} &= 1017 \text{ N} & M_{By} &= 30252 \text{ Nmm} \\
 R_{Cy} &= 2066 \text{ N} & R_{Cx} &= 2996 \text{ N} & R_{Cz} &= 605 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Per le equazioni delle azioni interne si utilizzano tre coordinate con origine in A, B, C. I momenti sono espressi in *Nmm* usando le lunghezze in *mm*.

$$\begin{aligned}
 M_x &= \begin{cases} -1961z_1 & 0 \leq z_1 \leq a \\ -333365 - 242z_2 & 0 \leq z_2 \leq b \\ -382994 + 1824z_3 & 0 \leq z_3 \leq c \end{cases} & Nmm \\
 M_y &= \begin{cases} 1017z_1 & 0 \leq z_1 \leq a \\ 142709 + 1172z_2 & 0 \leq z_2 \leq b \\ 382994 - 1824z_3 & 0 \leq z_3 \leq c \end{cases} & Nmm \\
 M_z &= \begin{cases} 0 & 0 \leq z_1 \leq a \\ 85944 & 0 \leq z_2 \leq b \\ 85944 & 0 \leq z_3 \leq c \end{cases} & Nmm
 \end{aligned}$$

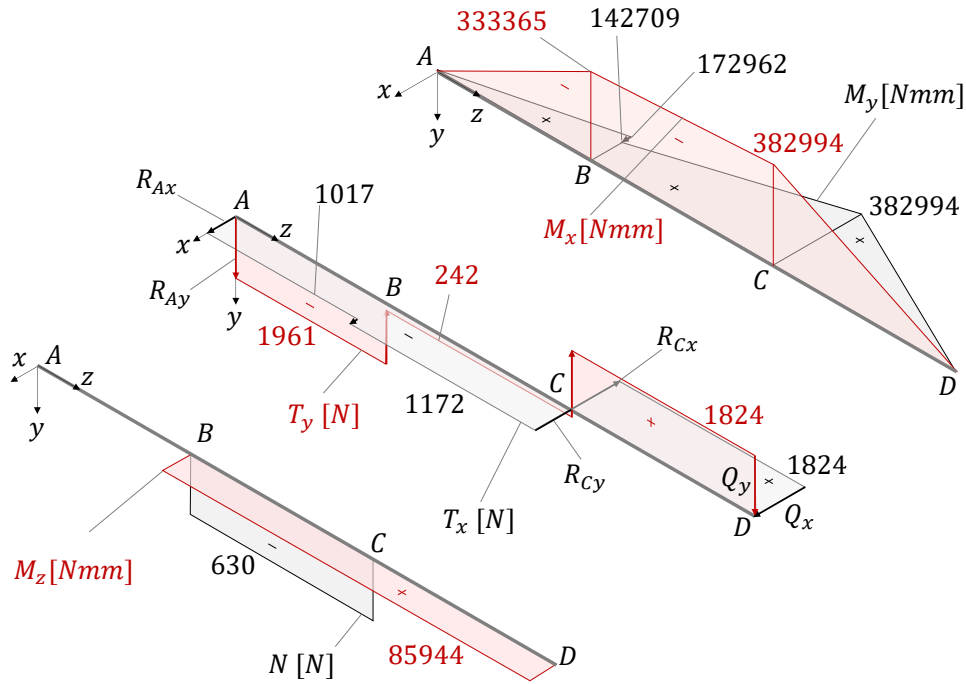


Figura 45: Grafici di azione interna

La regione critica è sicuramente in corrispondenza del cuscinetto C . Il diametro dell'albero è $D_2 = 37 \text{ mm}$ con variazione a $D_3 = 40 \text{ mm}$ nel punto di appoggio del cuscinetto, con raggio di raccordo $r = 1.5 \text{ mm}$. Sulla sezione di appoggio assiale del cuscinetto è necessario quindi tener conto dell'intaglio. Le tensioni nominali si ottengono da:

$$z_2 = b - \frac{L_5}{2} = 195 \text{ mm} \quad I_x = I_y = \frac{\pi D_2^4}{64} = 91998 \text{ mm}^4 \quad I_P = I_x + I_y$$

$$M_x = -380573 \text{ Nmm} \quad M_y = 371273 \text{ Nmm}$$

$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 531676 \text{ Nmm}$$

$$M_z = 85944 \text{ Nmm}$$

$$\tau_{\lambda z} = \frac{M_z D_2}{I_p} \frac{D_2}{2} = 17.3 \text{ MPa} \quad \sigma_{zz} = \frac{M_f D_2}{I_x} \frac{D_2}{2} = 106.9 \text{ MPa}$$

Per il calcolo del fattore di forma è necessario determinare i rapporti dimensionali per entrare nei grafici parametrici rappresentati in figura 46.

$$\frac{r}{D_2} = 0.041 \quad \frac{D_3}{D_2} = 1.08$$

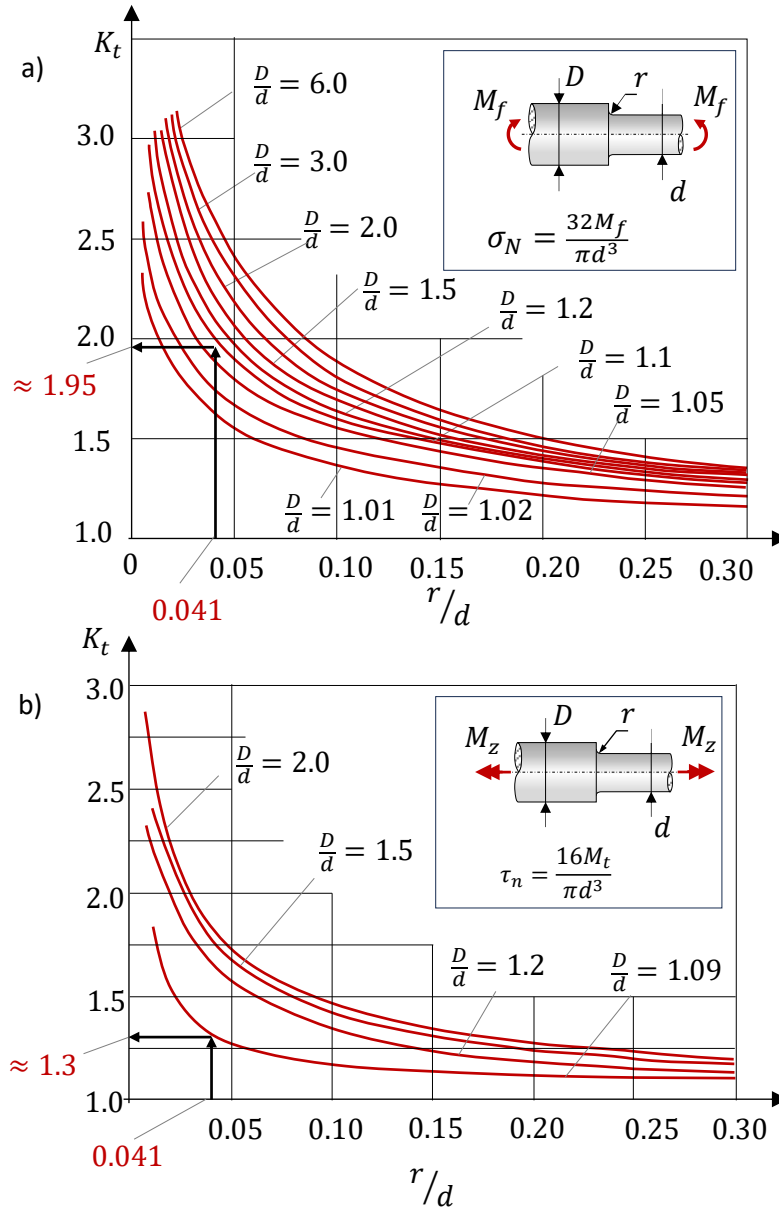


Figura 46: Grafici per il calcolo del fattore di forma

$$K_{T,M_t} \approx 1.3$$

$$K_{T,M_f} \approx 1.95$$

$$\tau_{\lambda z, max} = K_{T,M_t} \tau_{\lambda z} = 22.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz, max} = K_{T,M_f} \sigma_{zz} = 208.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{zz, max}^2 + 3\tau_{\lambda z, max}^2} = 212 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \phi_s = \frac{\sigma_{ys}}{\sigma_{eq}} = 2.64$$

L'albero soddisfa la specifica di resistenza.

Per la verifica di rigidezza si utilizza il metodo del carico ausiliario unitario nei due punti per i quali sono fornite le specifiche. Per il punto di estremità si fa riferimento alla coordinata d , punto terminale dell'albero, ove è necessario calcolare le componenti di spostamento u e v . Per il punto di calettamento della ruota si calcolano gli angoli di rotazione θ_x e θ_y . Gli schemi sono riportati di seguito, le azioni sono orientate nella direzione prevedibile dello spostamento.

Prima di procedere al calcolo è opportuno fare una considerazione sugli estremi d'integrazione. L'albero cambia diametro non esattamente nei punti B e C , ciò comporterebbe dover spezzare l'integrale in più parti. La distanza dai punti B e C a cui avviene il cambio diametro è relativamente piccola, inoltre si può considerare che gli organi calettati tendono a rendere localmente più rigido il sistema. Appare lecito quindi considerare il tratto a diametro maggiore compreso tra i punti B e C .

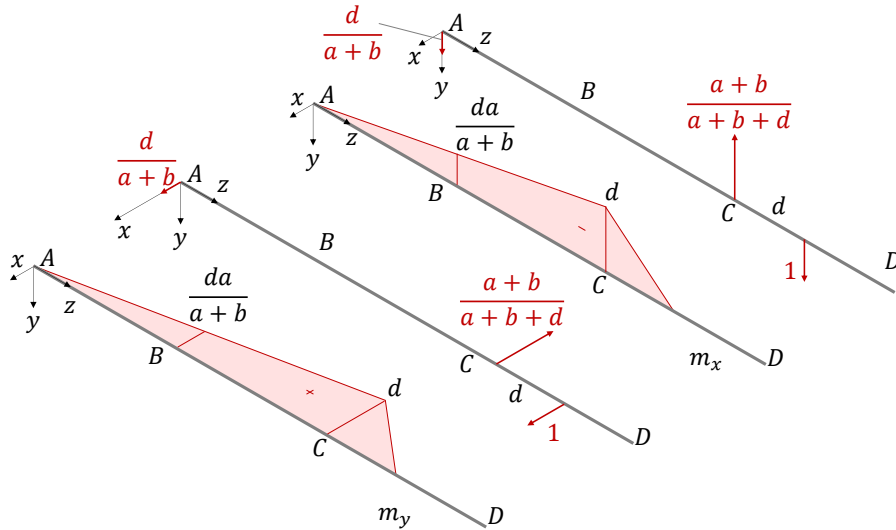


Figura 47: Carichi ausiliari per il calcolo dello spostamento in D

$$m_x = \begin{cases} -\frac{d}{a+b}z_1 & 0 \leq z_1 \leq a \\ -\frac{d}{a+b}(a+z_2) & 0 \leq z_2 \leq b \\ -d+z_3 & 0 \leq z_3 \leq c \end{cases} \quad m_y = \begin{cases} \frac{d}{a+b}z_1 & 0 \leq z_1 \leq a \\ \frac{d}{a+b}(a+z_2) & 0 \leq z_2 \leq b \\ d-z_3 & 0 \leq z_3 \leq c \end{cases}$$

$$v = \int_0^a \frac{M_x m_x}{EI_{x2}} dz_1 + \int_0^b \frac{M_x m_x}{EI_{x3}} dz_2 + \int_0^d \frac{M_x m_x}{EI_{x2}} dz_3$$

$$u = \int_0^a \frac{M_y m_y}{EI_{y2}} dz_1 + \int_0^b \frac{M_y m_y}{EI_{y3}} dz_2 + \int_0^d \frac{M_y m_y}{EI_{y2}} dz_3$$

$$v = 0.44 \text{ mm} \quad u = 0.29 \text{ mm} \quad \delta = \sqrt{u^2 + v^2} = 0.53 \text{ mm}$$

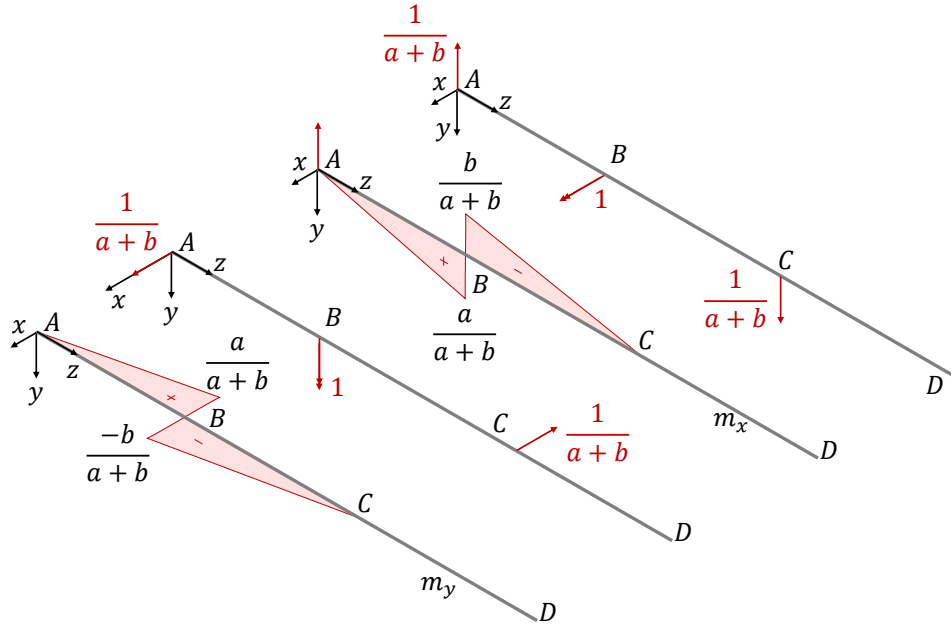


Figura 48: Carichi ausiliari per il calcolo delle rotazioni in B

$$m_x = \begin{cases} \frac{1}{a+b} z_1 & 0 \leq z_1 \leq a \\ \frac{1}{a+b} (z_2 - b) & 0 \leq z_2 \leq b \\ 0 & 0 \leq z_3 \leq c \end{cases} \quad m_y = \begin{cases} \frac{1}{a+b} z_1 & 0 \leq z_1 \leq a \\ \frac{1}{a+b} (z_2 - b) & 0 \leq z_2 \leq b \\ 0 & 0 \leq z_3 \leq c \end{cases}$$

$$\theta_x = \int_0^a \frac{M_x m_x}{EI_{x2}} dz_1 + \int_0^b \frac{M_x m_x}{EI_{x3}} dz_2$$

$$\theta_y = \int_0^a \frac{M_y m_y}{EI_{y2}} dz_1 + \int_0^b \frac{M_y m_y}{EI_{y3}} dz_2$$

$$\theta_x = 0.00030 \text{ rad} \quad \theta_y = 0.00070 \text{ rad}$$

La specifica sulla rotazione locale è soddisfatta con buon margine perché l'ingranaggio si trova in una posizione più o meno intermedia tra i due vincoli e probabilmente molto vicino al punto di stazionarietà della linea elastica.

Invece l'altro limite sullo spostamento all'utensile è ampiamente superato. Per rientrare nella specifica si può agire sulla lunghezza dei tratti di trave oppure sul diametro dell'albero. La lunghezza incide con potenza 3 sulla deformata, perché i carichi applicati sono azioni concentrate, mentre il diametro incide con potenza 4. Il rapporto tra il valore calcolato dello spostamento e quello ammissibile rappresenta il punto di riferimento per avviare la correzione.

$$\phi_\delta = \frac{\delta}{\delta_{amm}} = \frac{0.53}{0.08} = 6.60$$

$$\alpha_d = (\phi_\delta)^{1/4} = 1.603 \quad \alpha_L = \left(\frac{1}{\phi_\delta}\right)^{1/3} = 0.53$$

I due coefficienti forniscono un ordine di grandezza dei fattori per cui devono essere moltiplicati i diametri (α_d) o le lunghezze (α_L) per rientrare nelle specifiche.

Per il primo caso il fattore è diretto perché agisce sui momenti d'inerzia. Arrotondando per eccesso all'unità i diametri degli spezzoni dell'albero scalati dal fattore α_d :

$$d_2 = 60 \text{ mm} \quad d_3 = 65 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad \delta = 0.076 \text{ mm}$$

La seconda correzione è meno precisa perché interviene solo sulle lunghezze L_1 , L_2 , L_3 , le altre si devono considerare più o meno fissate dalle dimensioni degli organi calettati.

$$L_1 = 102 \text{ mm} \quad L_2 = 96 \text{ mm} \quad L_3 = 118 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad \delta = 0.076 \text{ mm}$$

Questo esempio mette in evidenza una situazione che si presenta molto spesso negli organi delle macchine, per i quali le specifiche funzionali legate alla rigidità sono quasi sempre molto più stringenti di quelle relative alla resistenza; ne consegue un sovraddimensionamento anche considerevole a resistenza.

Ci sono spesso ampi margini per ottimizzare l'uso del materiale, cercando di avvicinare il livello di criticità delle diverse specifiche. L'operazione spesso rimane più virtuale che pratica per altre ragioni di natura tecnologica ed economica.

Questo esempio fornisce alcuni suggerimenti pratici per semplificare l'analisi e per decidere come procedere quando è necessario rifare il dimensionamento.

Esempio 6: effetto d'una massa eccentrica su un albero di trasmissione

In figura è riportato un albero di trasmissione collegato al motore mediante un giunto flessibile che trasmette solo momento torcente. La coppia è trasmessa all'utilizzatore mediante una trasmissione a ingranaggi con ruote a denti diritti. All'estremità dell'albero è montato un volano di massa m , il quale per un errore di lavorazione non è centrato. Il centro di massa è posizionato con un'eccentricità e rispetto all'asse dell'albero. Si vuole studiare lo stato di tensione in funzione della coordinata angolare θ e identificare le posizioni a cui corrispondono le condizioni più critiche per l'albero. Si deve inoltre determinare la condizione di massimo spostamento in corrispondenza della ruota dentata.

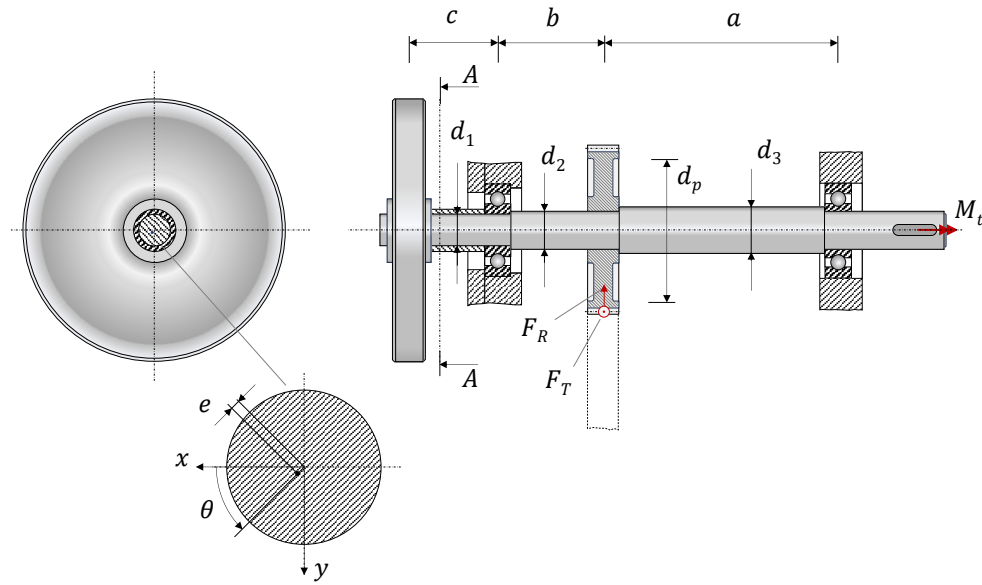


Figura 49: Albero di trasmissione con volano calettato eccentrico

Dati del problema:

$$\begin{aligned}
 m &= 30 \text{ kg} & e &= 1.25 \text{ mm} & P &= 12000 \text{ W} & n &= 1500 \text{ giri/min} \\
 a &= 300 \text{ mm} & b &= 120 \text{ mm} & c &= 120 \text{ mm} \\
 d_p &= 150 \text{ mm} & d_1 &= 32 \text{ mm} & d_2 &= 36 \text{ mm} & d_3 &= 40 \text{ mm} \\
 E &= 210 \text{ GPa} & \sigma_{ys} &= 480 \text{ MPa} \\
 \text{Raggi di raccordo non quotati :} & & r &= 1.25 \text{ mm} \\
 F_R &= 0.364 F_T
 \end{aligned}$$

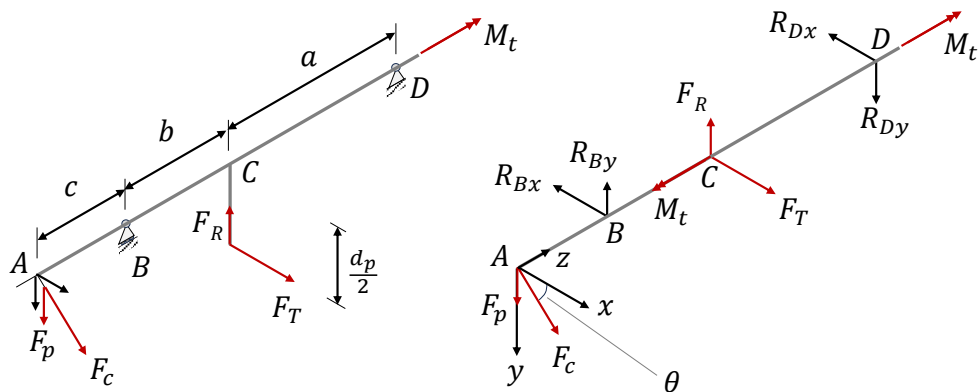


Figura 50: Modello di analisi e diagramma di corpo libero dell'albero

La forza centrifuga F_c dovuta all'eccentricità rappresenta una forza rotante diretta radialmente. La forza peso F_p del volano ha invece direzione fissa.

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 157.1 \text{ rad/s}$$

$$F_c = m\omega^2 e = 925.3 \text{ N}$$

$$F_p = mg = 294.3 \text{ N}$$

La forza peso al variare dell'angolo ha un braccio rispetto all'asse compreso tra 0 ed e , il valore del momento torcente prodotto è trascurabile rispetto al momento torcente M_t dovuto alla trasmissione di potenza.

La forza tangenziale all'ingranaggio esprime il momento resistente alla coppia motrice M_t .

$$M_t = \frac{P}{\omega} = 76.39 \text{ Nm}$$

$$F_T = \frac{2M_t}{d_p} = 1018.6 \text{ N}$$

$$F_R = 0.364F_T = 370.7 \text{ N}$$

Tutte le forze sono di entità paragonabile, tra queste F_p , F_T , F_R hanno direzione fissa, mentre F_c ruota. Si assume θ come coordinata angolare che definisce la direzione di F_c in un istante generico:

$$F_{c,x} = F_c \cos(\theta)$$

$$F_{c,y} = F_c \sin(\theta)$$

Reazioni vincolari

$$R_{Bx} = \frac{F_T a + F_{c,x}(a + b + c)}{a + b}$$

$$R_{Dx} = \frac{F_T b - F_{c,x}c}{a + b}$$

$$R_{By} = \frac{(F_{c,y} + F_p)(a + b + c) - F_R a}{a + b}$$

$$R_{Dy} = \frac{F_R b + (F_{c,y} + F_p)c}{a + b}$$

Per analizzare la condizione critica di sollecitazione conviene separare gli effetti delle azioni fisse e dell'azione rotante.

Azioni interne

Azioni dovute alle **forze fisse** F_p , F_T , F_R .

Dalle azioni interne rappresentate in figura 51, si desume che i punti potenzialmente critici per l'azione flettente, in relazione anche alle dimensioni dei diametri, sono B e C . In particolare nel punto C il momento risultante e l'inclinazione dell'asse momento sono rispettivamente:

$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 104.27 \text{ Nm} \quad \tan(\gamma) = \frac{M_y}{M_x} = 1.532$$

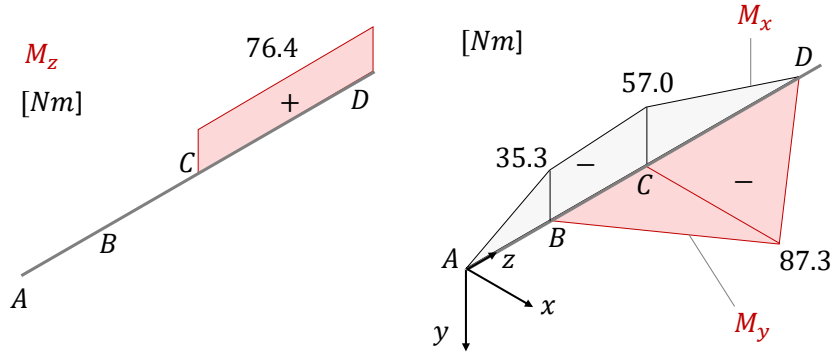
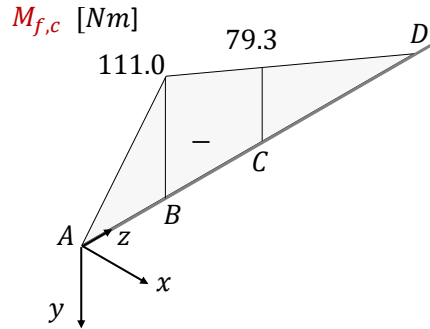


Figura 51: Azioni interne dovute alle forze esterne fisse

Azioni dovute alla **forza rotante** F_c .

Per l'assialsimmetria dell'albero, l'analisi si riduce sempre a una flessione retta in un piano che ruota con F_c . In particolare l'azione interna di momento sulla generica sezione è sempre in anticipo di fase di $\pi/2$ sulla forza F_c . In figura il grafico, valido per qualsiasi condizione angolare, è rappresentato per la condizione $\theta = \pi/2$.

Figura 52: Azioni interne dovute alla forza rotante F_c

Condizioni critiche per la sollecitazione

I punti da considerare sono il vincolo B e il punto di calettamento della ruota C . La condizione critica si ottiene quando le azioni interne di momento sono allineate e possono essere sommate algebricamente.

Punto B

Per il punto B la condizione è molto semplice poiché la flessione è retta M_x , la condizione critica si ottiene quando $\theta = \pi/2$:

$$M_{x,cr} = (F_p + F_c)c = 146.35 \text{ Nm}$$

Punto C

Per il punto C la condizione critica si ottiene quando l'azione interna di momento di F_c si allinea con l'azione risultante delle forze fisse:

$$M_{f,cr} = M_f + M_{f,c} = 183.6 \text{ Nm}$$

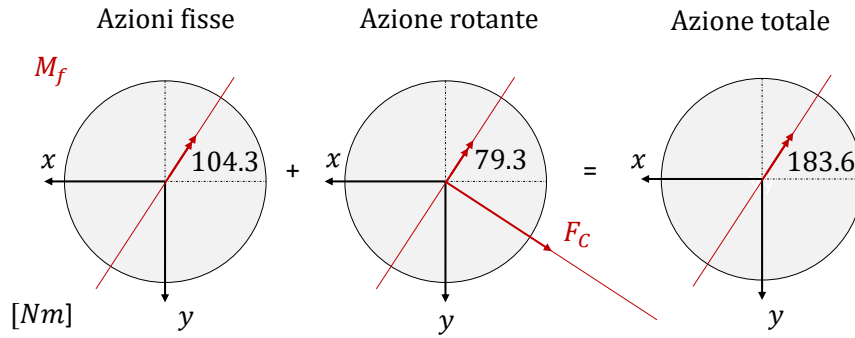


Figura 53: Condizione critica di momento flettente per il punto C

Proprietà geometriche

Per la sezione circolare i momenti d'inerzia rispetto a x e y sono uguali e sono indicati rispettivamente come I_1 , I_2 , I_3 per i tratti aventi diametri d_1 , d_2 , d_3 .

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi d_1^4}{64} = 51472 \text{ mm}^4 & I_{p,1} &= 2I_1 = 102944 \text{ mm}^4 \\ I_2 &= \frac{\pi d_2^4}{64} = 82448 \text{ mm}^4 & I_{p,2} &= 2I_2 = 164896 \text{ mm}^4 \\ I_3 &= \frac{\pi d_3^4}{64} = 125664 \text{ mm}^4 & I_{p,3} &= 2I_3 = 251328 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Stato di tensione

Nel punto B è presente solo azione flettente e, nelle condizioni critiche:

$$\sigma_{zz,B} = \frac{M_{x,cr}}{I_1} \frac{d_1}{2} = 45.5 \text{ MPa}$$

Nel punto C a titolo cautelativo si considera interamente anche l'azione di torsione.

$$\sigma_{zz,C} = \frac{M_{f,cr}}{I_2} \frac{d_2}{2} = 40.1 \text{ MPa} \quad \tau_{\lambda z} = \frac{M_z}{I_{p,2}} \frac{d_2}{2} = 8.4 \text{ MPa}$$

L'effetto dell'azione centrifuga è particolarmente importante: nel punto *B* il rapporto tra la tensione finale e quella in condizioni normali è superiore a 4, nel punto *C* l'incremento è più contenuto, il rapporto tra la tensione finale e quella nominale è comunque superiore a 1.6.

Per completare la verifica è necessario calcolare l'effetto d'intaglio nei due punti, avvalendosi dei diagrammi per il calcolo del K_t riportati nelle figure seguenti.

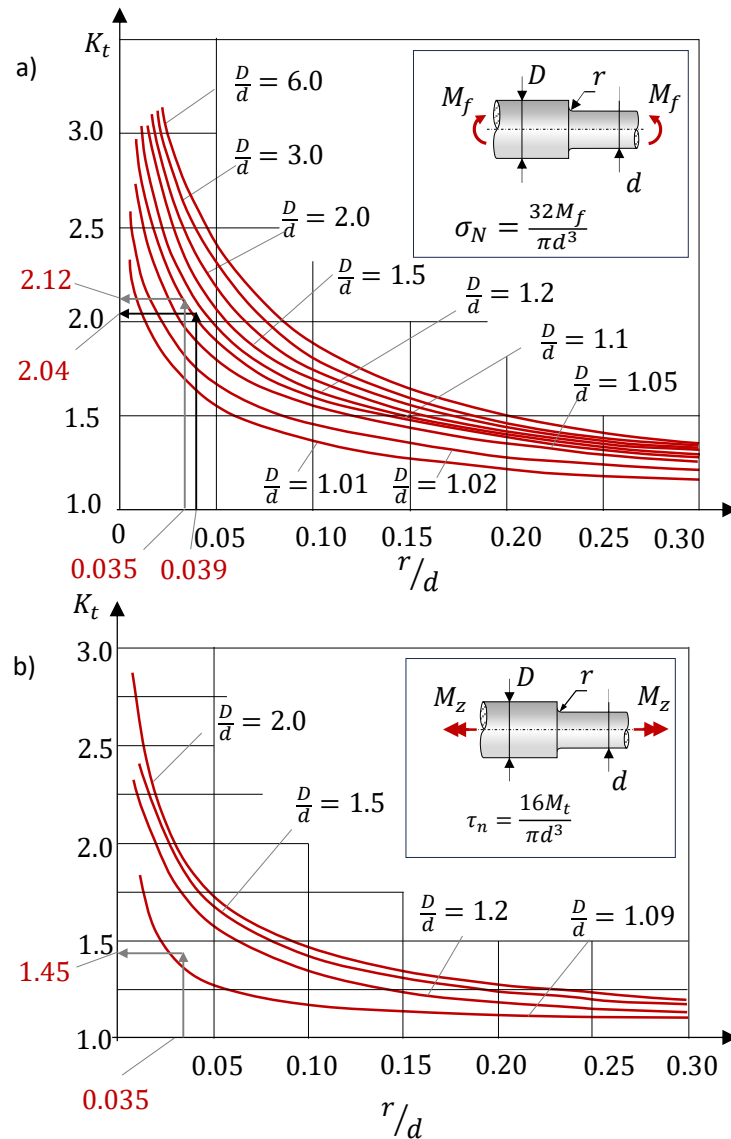


Figura 54: Grafici per il calcolo del fattore di forma: a) momento flettente, b) momento torcente

punto B: $\frac{r}{d_1} = 0.039 \quad \frac{d_2}{d_1} = 1.125 \quad \rightarrow \quad K_{t,f} \approx 2.04$

punto C: $\frac{r}{d_2} = 0.035 \quad \frac{d_3}{d_2} = 1.11 \quad \rightarrow \quad K_{t,f} \approx 2.12 \quad K_{t,Mt} \approx 1.45$

Secondo il criterio di Von Mises:

punto B: $\sigma_{eq,B} = K_{t,f} \sigma_{zz,B} = 92.80 \text{ MPa}$

punto C: $\sigma_{eq,C} = \sqrt{(K_{t,f} \sigma_{zz,C})^2 + 3(K_{t,Mt} \tau_{\lambda z})^2} = 87.50 \text{ MPa}$

Entrambe le condizioni di sollecitazione sono entro il dominio elastico ($\sigma_{ys} = 480 \text{ MPa}$).

In corrispondenza della ruota dentata si osserva che l'effetto dell'azione rotante è più critico quando lo spostamento da essa prodotto è allineato con lo spostamento dovuto alle forze fisse, così da sommare algebricamente i due spostamenti.

Per il calcolo dello spostamento si devono risolvere i due schemi rappresentati in figura 55 e applicare successivamente, in modo opportuno, il principio di sovrapposizione degli effetti.

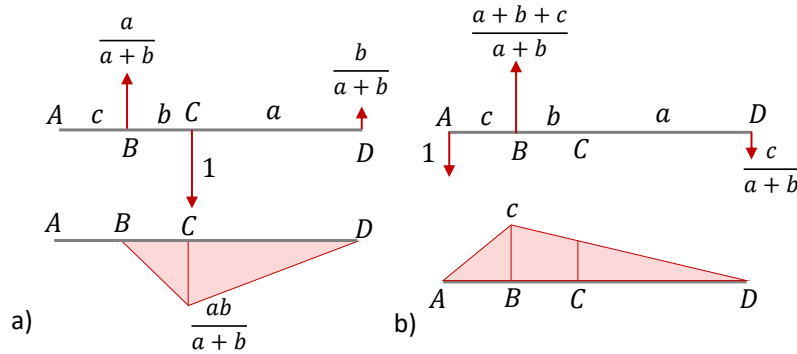


Figura 55: Schemi per il calcolo degli spostamenti in C

Per lo schema a) lo spostamento in direzione della forza unitaria è dato da:

$$\delta_a = \frac{1}{EI_2} \int_0^b \frac{a^2}{(a+b)^2} z^2 dz + \frac{1}{EI_3} \int_b^{a+b} \frac{b^2}{(a+b)^2} (a+b-z)^2 dz$$

$$\delta_a = \frac{a^2 b^3}{3EI_2(a+b)^2} + \frac{a^3 b^2}{3EI_3(a+b)^2} = \frac{a^2 b^2}{3E(a+b)^2} \left(\frac{b}{I_2} + \frac{a}{I_3} \right)$$

Per lo schema b) lo spostamento in C si ottiene con il metodo del carico ausiliario. Stabilito il sistema ausiliario come nella figura 56 si calcola lo spostamento δ_b in C nella direzione del carico esploratore.

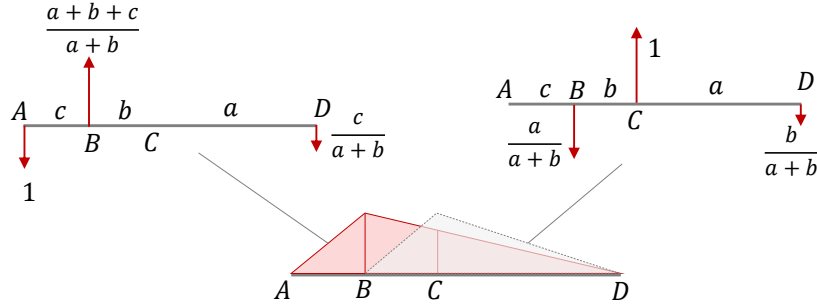


Figura 56: Calcolo dello spostamento in C per lo schema b) di figura 55 gli spostamenti in C

$$\delta_b = \frac{1}{EI_2} \int_0^b \frac{ca}{(a+b)} \left(1 - \frac{z}{a+b}\right) z dz + \frac{1}{EI_3} \int_b^{a+b} cb \left(1 - \frac{z}{a+b}\right)^2 dz$$

$$\delta_b = \frac{c a b^2 (3a+b)}{6EI_2(a+b)^2} + \frac{c b a^3}{3EI_3(a+b)^2}$$

Il valore positivo indica che lo spostamento avviene nella direzione del carico ausiliario.

Lo spostamento dovuto alla forza tangenziale alla ruota dentata (F_T) avviene nella direzione positiva dell'asse x e si ottiene da:

$$\delta_x = F_T \delta_a = F_T \frac{a^2 b^2}{3E(a+b)^2} \left(\frac{b}{I_2} + \frac{a}{I_3} \right) = 0.046 \text{ mm}$$

Lo spostamento dovuto alla forza radiale alla ruota (F_R) e alla forza peso del volano (F_P) è diretto lungo l'asse y ed è dato dalla sovrapposizione dei due effetti, entrambi diretti nel verso negativo dell'asse.

$$\delta_y = F_R \delta_a + F_P \delta_b = 0.0166 + 0.0167 = 0.033 \text{ mm}$$

Lo spostamento totale dovuto alle forze fisse:

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} = 0.057 \text{ mm}$$

Lo spostamento dovuto alla forza rotante è nella direzione della forza ed è dato da:

$$\delta_c = F_c \delta_b = F_c \frac{cab}{3E(a+b)^2} \left(\frac{b(3a+b)}{2I_2} + \frac{a^2}{I_3} \right) = 0.052 \text{ mm}$$

La condizione più critica si ottiene quando lo spostamento prodotto dalla forza F_c si allinea e si somma algebricamente con δ . Lo spostamento è quasi raddoppiato e ciò può essere critico per l'ingranamento delle ruote dentate

$$\delta_{cr} = \delta + \delta_c = 0.11 \text{ mm}$$

Esempio 7: struttura reticolare d'irrigidimento

La trave orizzontale della gru a cavalletto rappresentata in figura funge da via di corsa per un carrello al quale viene applicato un carico verticale F . La trave deve essere rinforzata per ragioni di rigidità in modo da rientrare entro lo spostamento ammissibile δ_{amm} nel punto di applicazione della forza. Si propone l'uso di una struttura reticolare costituita da elementi tubolari a sezione circolare. La struttura è appoggiata su ruote. L'altezza della struttura reticolare è vincolata per ragioni d'ingombro, non vi sono altri vincoli per la scelta della configurazione della struttura reticolare.

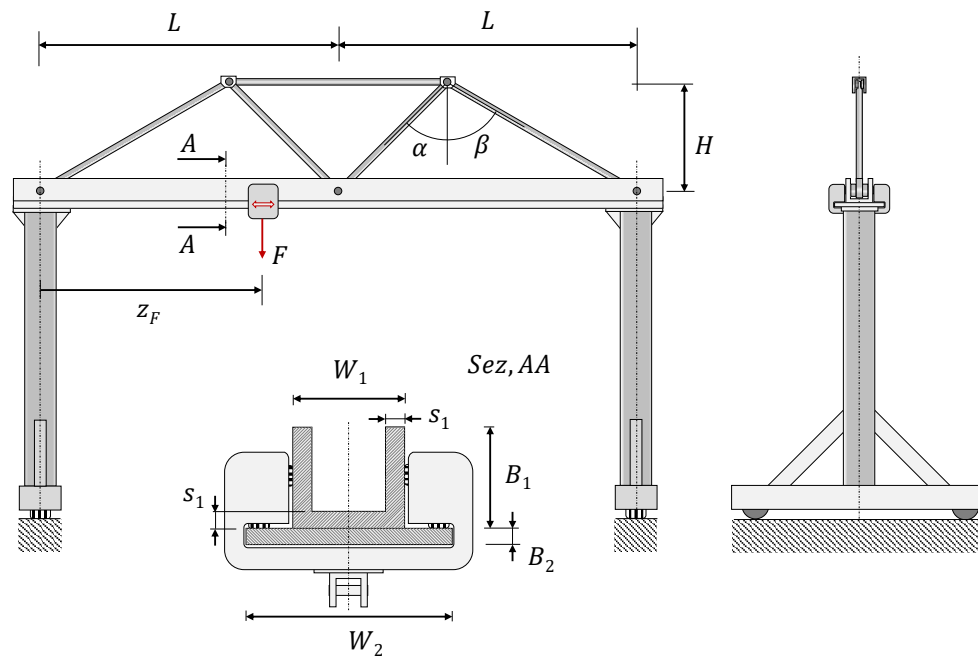


Figura 57: Gru a cavalletto con trave orizzontale irrigidita

Dati del problema:

$$\begin{aligned}
 L &= 2000 \text{ mm} & H &= 1000 \text{ mm} & W_2 &= 220 \text{ mm} & B_2 &= 12 \text{ mm} \\
 W_1 &= 130 \text{ mm} & s_1 &= 10 \text{ mm} & B_1 &= 130 \text{ mm} \\
 \text{Tubi :} & & D_e &= 50 \text{ mm} & D_i &= 46 \text{ mm} \\
 P &= 20000 \text{ N} & \delta_{amm} &= 2 \text{ mm} & E &= 210 \text{ GPa} & \sigma_{ys} &= 275 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Proprietà geometriche delle aste e della trave.

$$A_a = \frac{\pi (D_e^2 - D_i^2)}{4} = 301.6 \text{ mm}^2 \quad I_{x,a} = \frac{\pi (D_e^4 - D_i^4)}{64} = 87010 \text{ mm}^4$$

Si scompone la trave nella piastra di base (A_2), nelle due costole verticali (A'_1) e nella piastra orizzontale del profilo a U: A''_1 . La coordinata del baricentro della trave viene calcolata rispetto al baricentro della piastra orizzontale.

$$A'_1 = 2B_1s_1 = 2600 \quad A''_1 = (W_1 - 2s_1)s_1 = 1100 \quad A_2 = W_2B_2 = 2640 \text{ [mm}^2\text{]}$$

$$y'_1 = \frac{B_1 + B_2}{2} = 71 \quad y''_1 = \frac{s_1 + B_2}{2} = 11 \quad y_2 = 0 \quad [\text{mm}]$$

$$A_t = A'_1 + A''_1 + A_2 = 6340 \text{ mm}^2 \quad y_G = \frac{A'_1y'_1 + A''_1y''_1}{A_t} = 31.03 \text{ mm}$$

$$I_{x,t} = \frac{W_2s_2^3}{12} + A_2y_G^2 + \frac{s_1B_1^3}{6} + A'_1(y'_1 - y_G)^2 + \frac{s_1^3(W_1 - 2s_1)}{12} + A''_1(y''_1 - y_G)^2$$

$$I_{x,t} = 10831299 \text{ mm}^4$$

La struttura reticolare introduce un'iperstaticità interna che irrigidisce la struttura. Per massimizzare l'effetto d'irrigidimento è opportuno sfruttare tutto l'ingombro verticale ammesso. L'asta centrale quando la trave tende a inflettersi va in compressione ed esprime sui due archi a tre cerniere un'azione che si traduce sulla trave in una coppia raddrizzante che si oppone all'inflessione.

Appare opportuno che ognuno dei due archi copra metà della campata, come nella configurazione rappresentata in figura 57. Gli angoli α e β sono lasciati liberi, in modo da poterne valutare l'effetto sulla risposta della struttura.

La struttura è esternamente isostatica, le colonne, soggette solo a compressione si possono considerare rigide e nel modello di analisi si sostituiscono con due carrelli. Si approssimano i centri dei nodi di vincolo della reticolare alla trave come baricentrici rispetto alla sezione.

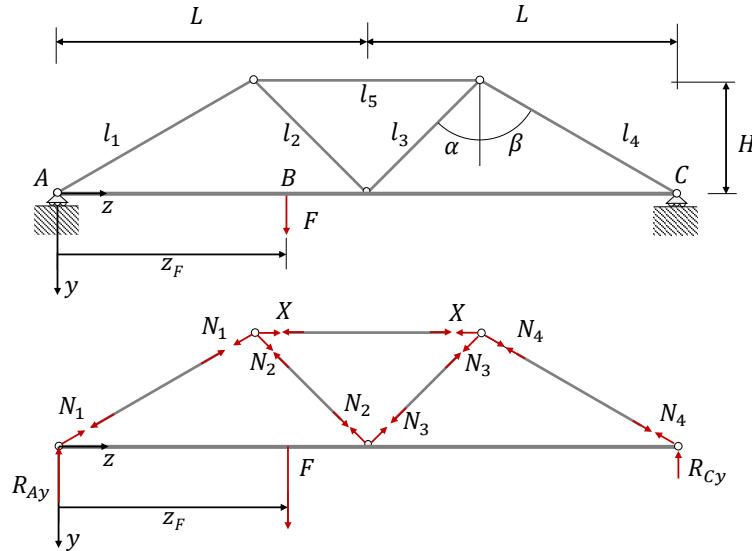


Figura 58: Modello d'analisi e schema di corpo libero

Se la trave non è irrigidita la posizione critica della forza è nel punto di mezzeria. Nel sistema rinforzato il punto di massimo spostamento dipende dall'irrigidimento, si lascia pertanto libera anche la posizione della forza.

$$\begin{aligned} R_{Ay} &= F \left(1 - \frac{z_f}{2L}\right) & R_{Ay} &= F \frac{z_f}{2L} \\ N_1 \cos(\beta) &= -N_2 \cos(\alpha) & N_1 \sin(\beta) - N_2 \sin(\alpha) &= X \\ N_1 = N_4 &= \frac{X \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} & N_2 = N_3 &= -\frac{X \cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la geometria della reticolare:

$$l_1 \cos(\beta) = l_2 \cos(\alpha) = H \quad l_1 \sin(\beta) + l_2 \sin(\alpha) = L \quad l_5 = 2l_2 \sin(\alpha)$$

$$\frac{L}{H} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} = \tan(\alpha) + \tan(\beta)$$

Ne consegue:

$$N_1 = N_4 = X \frac{H}{L \cos(\beta)} \quad N_2 = N_3 = -X \frac{H}{L \cos(\alpha)}$$

Per lo studio dell'iperstatica si adotta il metodo dell'integrale di Müller-Breslau. La condizione di congruenza da porre prevede spostamento relativo nullo nel punto in cui è svincolata la trave 5.

Sistema 0

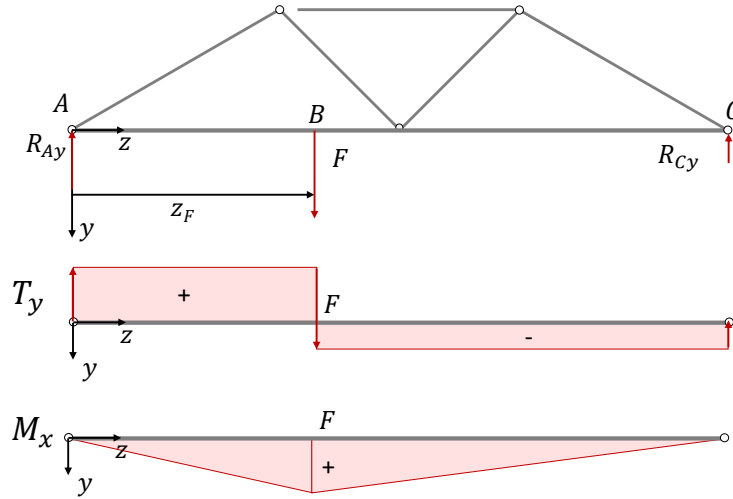


Figura 59: Azioni interne del sistema 0

$$M_x = \begin{cases} Fz \left(1 - \frac{z_F}{2L}\right) & 0 \leq z \leq z_F \\ F(2L - z) \frac{z_F}{2L} & z_F \leq z \leq 2L \end{cases}$$

Sistema 1

Oltre alle azioni interne nella reticolare, si identificano azioni nella trave. Per semplificare, vista l'area della sezione, sulla trave si considerano solo le azioni di momento e si trascurano le azioni normali.

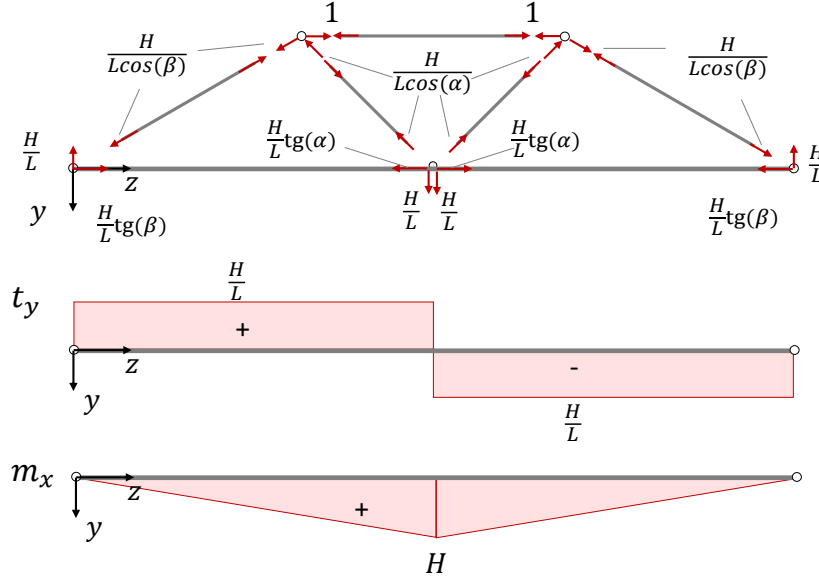


Figura 60: Azioni interne del sistema 1

$$n_1 = n_4 = \frac{H}{L \cos(\beta)} \quad n_2 = n_3 = -\frac{H}{L \cos(\alpha)} \quad n_5 = 1$$

$$m_x = \begin{cases} \frac{H}{L} z & 0 \leq z \leq L \\ \frac{H}{L} (2L - z) & L \leq z \leq 2L \end{cases}$$

Si scrive l'integrale di Müller Breslau, imponendo nullo lo spostamento relativo nel punto di svincolamento della trave interna 5.

$$0 = \frac{F}{EI_x} \left[\int_0^{z_F} \frac{(2L - z_F)H}{2L^2} z^2 dz + \frac{z_F H}{2L^2} \left(\int_{z_F}^L (2L - z)z dz + \int_L^{2L} (2L - z)^2 dz \right) \right] + X \left[\frac{2}{EI_x} \int_0^L \frac{H^2 z^2}{L^2} dz + \frac{1}{EA_a} \left(2l_1 \left(\frac{H}{L \cos(\beta)} \right)^2 + 2l_2 \left(\frac{H}{L \cos(\alpha)} \right)^2 + l_5 \right) \right]$$

Questa relazione si può sintetizzare come segue:

$$\eta_{10} F + \eta_{11} X = 0 \quad \rightarrow \quad X = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} F$$

dove η_{10} e η_{11} sono coefficienti d'influenza.

$$\eta_{10} = \frac{Hz_F}{6LEI_X} (3L^2 - z_F^2)$$

$$\eta_{11} = \frac{2H^2L}{3EI_X} + \frac{2H^3}{EA_aL^3} \left(\frac{1}{\cos(\beta)^3} + \frac{1}{\cos(\alpha)^3} + \frac{L^2 \sin(\alpha)}{H^2 \cos(\alpha)} \right)$$

Si osserva che η_{10} è stato calcolato nell'ipotesi $0 \leq z_F \leq L$. Quando la forza si trova nella seconda metà della trave i valori si ripetono simmetricamente. Ha senso quindi studiare l'effetto della posizione di F solo su metà della trave.

L'effetto di massimo momento raddrizzante sulla trave si ottiene massimizzando il valore dell'incognita X , poiché il braccio H è costante. Di conseguenza è necessario minimizzare il valore del coefficiente d'influenza η_{11} . Questo coefficiente non dipende dalla posizione della forza applicata. Si tratta di un problema di ottimizzazione, in cui si minimizza la funzione degli angoli α e β , soggetta al vincolo di uguaglianza:

$$\frac{L}{H} = \tan(\alpha) + \tan(\beta)$$

Il vincolo riduce il calcolo allo studio del minimo di una funzione di una variabile (in α o in β), che si determina in modo relativamente agevole. In base ai dati del problema il minimo corrisponde alla condizione:

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0.6020 & \beta = 0.9199 & \eta_{11} = 0.00065703 \\ l_1 = 1650.4 \text{ mm} & l_2 = 1213.3 \text{ mm} & 1374.05 \text{ mm} \end{array}$$

Lo spostamento in direzione della forza si ottiene per sovrapposizione degli effetti da:

$$\delta = \eta_{00}F + \eta_{01}X$$

Per il teorema di Maxwell-Betti vale $\eta_{01} = \eta_{10}$, rimane quindi da calcolare solo il coefficiente d'influenza η_{00} .

Il termine $\delta_F = F\eta_{00}$ rappresenta lo spostamento nella direzione della forza prodotto dalla forza stessa e descrive quindi la risposta della trave in assenza dell'irrigidimento. In base al grafico delle azioni interne del sistema 0 si scrive:

$$\eta_{00} = \frac{1}{EI_x} \left(\int_0^{z_F} \frac{(2L - z_F)^2 z^2}{4L^2} dz + \int_{z_F}^{2L} \frac{z_F^2 (2L - z)^2}{4L^2} dz \right)$$

$$\eta_{00} = \frac{z_F^2 (2L - z_F)^2}{6EI_x L}$$

La condizione più critica si ottiene in corrispondenza del valore di z_F che produce il massimo spostamento, dato il valore ottimizzato di η_{11} . L'espressione per lo spostamento è data da:

$$\delta = \eta_{00}F + \eta_{01}X = F \left(\eta_{00} - \frac{\eta_{01}^2}{\eta_{11}} \right)$$

$$\delta = F \left[\frac{z_F^2 (2L - z_F)^2}{6EI_x L} - \frac{1}{\eta_{11}} \left(\frac{Hz_F}{6EI_x L} (3L^2 - z_F^2) \right)^2 \right]$$

Anche in questo caso si tratta dello studio di funzione di una variabile:

$$\begin{aligned} z_{f,max} &\approx 1181 \text{ mm} & \delta_{max} &= 1.72 \text{ mm} \\ \delta_{max} &< \delta_{amm} \end{aligned}$$

Lo spostamento massimo della trave in assenza del rinforzo si raggiunge quando la forza si trova esattamente nel punto medio della trave ($z_F = L$).

$$\begin{aligned} \delta_{F,max} &= \eta_{00} F = \frac{FL^3}{6EI_x} = 11.72 \text{ mm} \\ \delta_{F,max} &> \delta_{amm} \end{aligned}$$

In assenza dell'irrigidimento la specifica sullo spostamento è violata in modo evidente. Per avere un comportamento della trave simile a quello ottenuto con rinforzo si considera il rapporto tra i due valori di spostamento:

$$\phi = \frac{\delta_{F,max}}{\delta_{max}} = 6.828$$

L'unico parametro su cui si può agire è il momento d'inerzia, che deve essere moltiplicato del fattore ϕ . Il parametro che maggiormente incide sul momento d'inerzia è la dimensione B_1 , che entra nell'espressione del momento d'inerzia con la terza potenza. Si assume come tentativo:

$$B'_1 \approx B_1 \sqrt[3]{\phi} \approx 250 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad I'_x = 61102717 \text{ mm}^4$$

La correzione non è ancora sufficiente, per rientrare nel valore fissato è necessario incrementare fino a $B'_1 \approx 270 \text{ mm}$.

Il volume della trave è totalmente legato alla variazione d'area. In base alla nuova dimensione, lasciando invariate le altre dimensioni il rapporto tra le aree è:

$$\phi_A = \frac{9140}{6340} = 1.44$$

Il peso cresce quindi del 44%.

Per la struttura rinforzata il volume finale è:

$$V = V_t + V_a = 2A_t L + A_a [2(l_1 + l_2) + l_5] = 5200000 + 420171 = 5620171 \text{ mm}^3$$

$$\frac{\Delta V}{V_t} = \frac{420171}{5200000} = 0.081$$

In questo caso l'incremento di materiale usato è 8.1%.

Per concludere è necessario condurre le verifiche di resistenza per la trave e per le aste e la verifica d'instabilità per le aste in compressione (1, 4, 5).

Per la trave la condizione più critica per la verifica di resistenza richiede di calcolare il massimo del momento flettente in funzione della posizione della forza. Il momento flettente si ottiene dalla sovrapposizione degli effetti di F e di X .

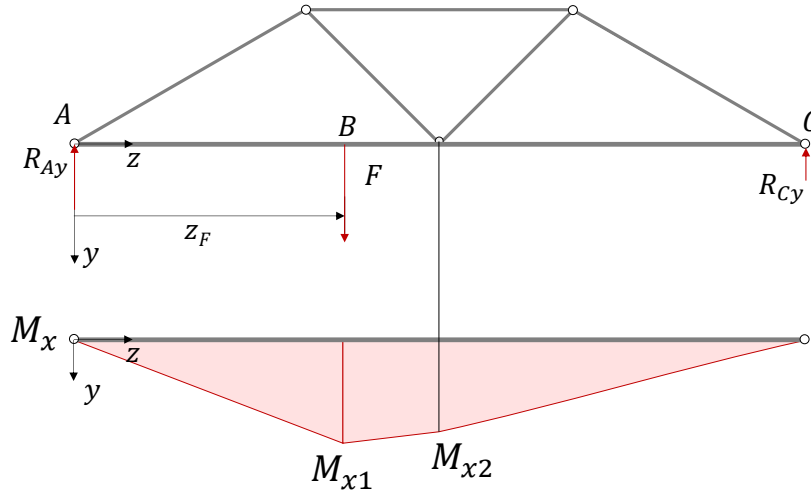


Figura 61: Momento flettente risultante dalla sovrapposizione degli effetti di F e di X

L'andamento riportato è puramente qualitativo e non è noto a priori quale sia maggiore tra M_{x1} e M_{x2} , le cui espressioni in funzione della posizione della forza z_F sono le seguenti:

$$M_{x1} = F \frac{(2L - z_F)z_F}{2L} - F \frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} \frac{z_F H}{L}$$

$$M_{x2} = F \frac{z_F}{2} - F \frac{\eta_{10} H}{\eta_{11}}$$

La determinazione della posizione z_F più critica è ancora un problema di ricerca del massimo delle funzioni $M_{x1}(z_F)$ e $M_{x2}(z_F)$. Va osservato che il coefficiente di influenza η_{10} è funzione di z_F , di conseguenza M_{x1} e M_{x2} sono polinomiali rispettivamente di quarto e terzo grado in z_F . Il dominio è limitato a $0 \leq z_F \leq L$, poiché quando la forza supera il punto di mezzeria le soluzioni si ripetono simmetricamente.

Da questa analisi si ottiene che la posizione più critica è sempre quella di applicazione della forza e il momento M_{x1} è massimo per:

$$z_F = 933.2 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad M_{x1} = 8908988 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} |y_{max}| = \frac{8908988}{10839549.3} \cdot 105 = 86 \text{ MPa}$$

In assenza del rinforzo il momento flettente è molto più elevato.

$$M_x = \frac{FL}{2} = 2.00 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} |y_{max}| = \frac{2.00 \cdot 10^7}{10839549.3} \cdot 105 = 194 \text{ MPa}$$

Per le aste, poichè il coefficiente di influenza η_{10} è massimo per $z_F = L$ la verifica di resistenza pone:

$$1 \text{ e } 4 : N = \frac{XH}{L \cos(\beta)} = -14715 \text{ N} \rightarrow \sigma_{zz} = \frac{N}{A_a} = -49 \text{ MPa}$$

$$2 \text{ e } 3 : N = \frac{XH}{L \cos(\alpha)} = 10817 \text{ N} \rightarrow \sigma_{zz} = 36 \text{ MPa}$$

$$5 : N = X = -17831 \text{ N} \rightarrow \sigma_{zz} = -59 \text{ MPa}$$

Tutti gli elementi hanno un margine elevato rispetto allo snervamento, che per entrambi i componenti è acciaio da costruzione avente $\sigma_{ys} = 275 \text{ MPa}$.

Le aste in compressione devono essere verificate a instabilità, tutte sono riconducibili al secondo caso di Eulero e quindi i carichi critici sono rispettivamente:

$$1 \text{ e } 4 : P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{x,a}}{l_1^2} = 66210 \text{ N}$$

$$5 : P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{x,a}}{l_5^2} = 95499 \text{ N}$$

Anche in questo caso le aste hanno un buon margine di sicurezza rispetto ai valori critici.