APPENDICE **A**

# Soluzioni

## A.1 Elementi di teoria degli insiemi

**Esercizio 1.5.1.** (1) $B \subseteq A$; (2) $B \subseteq A$; (3) $B \not\subseteq A$; (4) $B \subseteq A$.

**Esercizio 1.5.2.** (1) $B \subseteq A$; (2) $B \not\subseteq A$; (3) $B \not\subseteq A$; (4) $B \subseteq A$.

**Esercizio 1.5.3.** (1) $B \subseteq A$; (2) $B \not\subseteq A$; (3) $B \subseteq A$; (4) $B \not\subseteq A$.

**Esercizio 1.5.4.** (1) $B \not\subseteq A$; (2) $B = A$; (3) $B = A$; (4) $B = A$.

**Esercizio 1.5.5.** (1) $B = A$; (2) $B \subsetneq A$; (3) $B \not\subseteq A$; (4) $B \subsetneq A$.

**Esercizio 1.5.6.** (1) $B \subsetneq A$; (2) $A \subsetneq B$; (3) $A \not\subseteq B$ e $B \not\subseteq A$; (4) $A = B$.

**Esercizio 1.5.7.** (1) $A = B$; (2) $A = B$; (3) $A \subsetneq B$; (4) $A \subsetneq B$.

**Esercizio 1.5.8.** $\mathbb{N}_t \subseteq \mathbb{N}_2$ se e solo se $t$ è un numero pari.

**Esercizio 1.5.9.** $C = B \cup \{4\}$ soddisfa la relazione $B \subsetneq C \subsetneq A$;
$D = \{\, 8k + 4 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ soddisfa le relazioni $D \subseteq A$ e $D \cap B = \emptyset$.

**Esercizio 1.5.10.** (1) $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$;
(2) $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$;
(3) $A \times B = \{\, (3, n) \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, (4, n) \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, (5, n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$;
(4) $A \times B = \{\, (z, r) \mid z \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R} \,\}$.

**Esercizio 1.5.11.** $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid z < 0 \,\}$; $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \emptyset$.

**Esercizio 1.5.12.** $A \cap \mathbb{N} = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > 1 \,\}$.

**Esercizio 1.5.13.** $A \cap B = \{2\}$.

**Esercizio 1.5.14.** $A \cap B = \{1, 2, 3\}$; $B - A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

**Esercizio 1.5.15.** $A \times B = \{(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,0),(2,0),(-2,1),(-1,1),(0,1),$ $(1,1),(2,1)\}$.

**Esercizio 1.5.16.** $A \cap \mathbb{N} = A \cap \mathbb{Z} = \{2,3\}$.

**Esercizio 1.5.17.** $A = \left\{ (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1 \leq n_2 \right\}$.

**Esercizio 1.5.18.** $\mathbb{Z}^2 - A = \{ (z,z) \mid z \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{Z}^2$.

**Esercizio 1.5.19.** $C = \{0, 2/3, 1, 4/3, 2, 8/3, 3, 10/3, 4, 5, 6, 8, 10\}$; $A \cap B = \{2\}$; $A \cap C = A$; $B \cap C = B$.

**Esercizio 1.5.20.** $(A - B) \cup (B - A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 3 \text{ o } 10 \leq x \leq 12 \}$.

**Esercizio 1.5.21.** $A \cap B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$; $B - A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \}$.

**Esercizio 1.5.22.** $A \times B \times C = \{(2,-2,0),(2,-2,1),(2,2,0),(2,2,1),(3,-2,0),$ $(3,-2,1),(3,2,0),(3,2,1)\}$.

**Esercizio 1.5.23.** $A \cap B = \{(0,0),(1,1)\}$; $A - B = A - \{(1,1)\}$.

**Esercizio 1.5.24.** $A \cap \mathbb{N}^2 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,15),(2,1),(2,3),(2,5),(2,15),$ $(5,1),(5,3),(5,5),(5,15),(10,1),(10,3),(10,5),(10,15)\}$.

**Esercizio 1.5.25.** $A^2 \cap \mathbb{N}^2 = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

**Esercizio 1.5.26.** $A^2 \cap \mathbb{Z}^2 = \{(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2)\}$.

**Esercizio 1.5.42.** (1) $f$ è suriettiva, ma non iniettiva; (2) $f$ è biiettiva; (3) $f$ è iniettiva, ma non suriettiva; (4) $f$ non è né iniettiva, né suriettiva; (5) $f$ è suriettiva, ma non iniettiva.

**Esercizio 1.5.43.** (1) $f$ non è né iniettiva, né suriettiva; (2) $f$ è suriettiva, ma non iniettiva; (3) $f$ è iniettiva, ma non suriettiva; (4) $f$ è biiettiva; (5) $f$ è suriettiva, ma non iniettiva.

**Esercizio 1.5.44.** (1) $f$ è iniettiva, ma non suriettiva; (2) $f$ non è né iniettiva, né suriettiva; (3) $f$ è iniettiva, ma non suriettiva; (4) $f$ è biiettiva.

**Esercizio 1.5.45.** (1) $f$ è biiettiva; (2) $f$ non è né iniettiva, né suriettiva; (3) $f$ è iniettiva, ma non suriettiva; (4) $f$ è biiettiva.

**Esercizio 1.5.46.** Non esiste una tale funzione.

**Esercizio 1.5.47.** $f$ è iniettiva se $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$, per ogni $b \in \mathbb{Z}$.

**Esercizio 1.5.48.** $f$ è iniettiva se e solo se $k \geq 0$.

**Esercizio 1.5.49.** $f$ è biiettiva.

**Esercizio 1.5.50.** $f$ non è né iniettiva, né suriettiva.

**Esercizio 1.5.51.** $f$ è iniettiva, ma non suriettiva.

**Esercizio 1.5.52.** (1) $f$ non è né iniettiva, né suriettiva; (2) $f$ è biiettiva; (3) $f$ è suriettiva, ma non iniettiva; (4) $f$ è suriettiva, ma non iniettiva.

**Esercizio 1.5.53.** (1) $f$ è biiettiva; (2) $f$ è iniettiva, ma non suriettiva; (3) $f$ è suriettiva, ma non iniettiva; (4) $f$ non è né iniettiva, né suriettiva.

**Esercizio 1.5.54.** (1) $f$ è iniettiva, ma non suriettiva; (2) $f$ è biiettiva; (3) $f$ è biiettiva; (4) $f$ è biiettiva.

**Esercizio 1.5.55.** Non esiste una funzione $f\colon \{0,1\} \to \{1\}$ che sia iniettiva.

**Esercizio 1.5.56.** $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$; $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$; $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 2$; $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$; $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$; $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.

**Esercizio 1.5.57.** $f$ è biiettiva.

**Esercizio 1.5.58.** $f$ è suriettiva, ma non iniettiva.

**Esercizio 1.5.59.** $f$ è suriettiva, ma non iniettiva;
$f^{-1}(1) = \left\{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; 3z_1 - z_2 + 2z_3 = 1 \right\}$; $(0,-1,0), (1,0,-1) \in f^{-1}(1)$.

**Esercizio 1.5.60.** $f^{-1}(\{4,5,6\}) = \{1,2,3\}$.

**Esercizio 1.5.61.** $f^{-1}(\{4,5,6\}) = \{1,2,3\}$; $f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{0\}$.

**Esercizio 1.5.62.** $f$ è biiettiva e dunque invertibile. La sua funzione inversa $f^{-1}\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è definita da $f^{-1}(z) = z/2$.

**Esercizio 1.5.63.** $f^{-1}\big((-\infty, 0]\big) = \{0\}$.

**Esercizio 1.5.64.** $f^{-1}(0) = \{ (-2z, z) \mid z \in \mathbb{Z} \}$.

**Esercizio 1.5.65.** $f(A) = \{-1\}$.

**Esercizio 1.5.66.** $\operatorname{Im} f = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$.

**Esercizio 1.5.67.** $f^{-1}(\{-1,3\}) = \{(-1,1), (1,-1), (-3,-1), (-1,-3), (1,3), (3,1)\}$.

**Esercizio 1.5.68.** $f^{-1}(\{3,4,5,6,7\}) = \{-2,2\}$.

**Esercizio 1.5.69.** Se $A = \{(0,0)\}$, allora $f^{-1}(A) = \varnothing$.

**Esercizio 1.5.71.** $f \circ g = g \circ f$.

**Esercizio 1.5.72.** $f \circ g \neq g \circ f$.

**Esercizio 1.5.73.** $f$ non è invertibile.

**Esercizio 1.5.74.** $f$ non è invertibile; $f^{-1}(\{0,1,2\}) = \{0,1\}$.

**Esercizio 1.5.75.** $(f \circ f)(z) = z$, $(g \circ g)(z) = z^4$, $(f \circ g)(z) = -z^2$ e $(g \circ f)(z) = z^2$, per ogni $z \in \mathbb{Z}$; $f \circ f$ è iniettiva; $g \circ g$, $f \circ g$ e $g \circ f$ non sono iniettive.

**Esercizio 1.5.76.** $f$ è biiettiva; $g$ non è biiettiva.

**Esercizio 1.5.77.** $f(a) = \log_2(a)$ per ogni $a \in A$; $f^{-1}\colon \mathbb{N} \to A$ è definita da $f^{-1}(n) = 2^n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

**Esercizio 1.5.78.**
$f^{-1}(0) = \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \} \cup \{ (0,x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \left\{ x, y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 0 \text{ o } y = 0 \right\}$.

**Esercizio 1.5.79.** (1) $(A,+)$ non è un sottomagma; (2) $(A,+)$ è un sottomagma; (3) $(A,+)$ è un sottomagma; (4) $(A,+)$ non è un sottomagma; (5) $(A,+)$ non è un sottomagma; (6) $(A,+)$ è un sottomagma.

**Esercizio 1.5.80.** (1) $(B,+)$ non è un sottomagma; (2) $(B,+)$ è un sottomagma; (3) $(B,+)$ non è un sottomagma; (4) $(B,+)$ è un sottomagma; (5) $(B,+)$ non è un sottomagma; (6) $(B,+)$ non è un sottomagma.

**Esercizio 1.5.81.** (1) $(A,\cdot)$ è un sottomagma; (2) $(A,\cdot)$ è un sottomagma; (3) $(A,\cdot)$ non è un sottomagma; (4) $(A,\cdot)$ non è un sottomagma; (5) $(A,\cdot)$ non è un sottomagma; (6) $(A,\cdot)$ è un sottomagma.

**Esercizio 1.5.82.** (1) $*$ non è commutativa; (2) $*$ è commutativa; (3) $*$ è commutativa; (4) $*$ non è commutativa.

**Esercizio 1.5.83.** (1) $*$ non è associativa; (2) $*$ non è associativa; (3) $*$ è associativa; (4) $*$ non è associativa.

**Esercizio 1.5.84.** $(\mathbb{Q},\odot)$ ammette un elemento neutro, che è dato da $1/6$.

**Esercizio 1.5.85.** $(\mathbb{Z},\odot)$ non ammette un elemento neutro.

**Esercizio 1.5.86.** $(\mathbb{Z},\cdot)$ non è un gruppo.

**Esercizio 1.5.87.** $(\mathbb{Q}^*,\odot)$ non è un gruppo.

**Esercizio 1.5.88.** $(\mathbb{Z},*)$ è un gruppo commutativo.

**Esercizio 1.5.89.** $(A,\odot)$ è un gruppo commutativo.

**Esercizio 1.5.91.** $(\mathbb{Q},*)$ non è un gruppo.

## A.2 Spazi vettoriali

**Esercizio 2.4.1.** $(\mathbb{R}^3,+,*)$ è uno spazio vettoriale.

**Esercizio 2.4.2.** $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ non è uno spazio vettoriale.

**Esercizio 2.4.4.** $(A,+,*)$ non è uno spazio vettoriale.

**Esercizio 2.4.5.** (1) $(0,1,1)$; (2) $(-1,6,10)$; (3) $(4,-1,3)$; (4) $(-1,3,-1)$.

**Esercizio 2.4.6.** (1) $(5,13,9)$; (2) $(6,10,10)$; (3) $(9,5,17)$; (4) $(5,-5,7)$.

**Esercizio 2.4.7.** (1) $(5,7,-1,5)$; (2) $(8,5,-18,16)$; (3) $(9,9,4,5)$;
(4) $(-9,-10,24,-21)$.

**Esercizio 2.4.8.** (1) $(1,-6,-4,2)$; (2) $(3,11,-1,-1)$; (3) $(10,1,18,-3)$;
(4) $(-4,1,-16,2)$.

**Esercizio 2.4.9.** (1) $[(-1,-3)]_{\mathcal{B}} = (-5,2)$; (2) $[(7,10)]_{\mathcal{B}} = (13,-3)$; (3) $[(1,4)]_{\mathcal{B}} = (7,-3)$.

**Esercizio 2.4.10.** (1) $[(-2,-1)]_{\mathcal{B}} = (2,-3)$; (2) $[(-3,2)]_{\mathcal{B}} = (3,-1)$; (3) $[(-2,4)]_{\mathcal{B}} = (2,2)$.

**Esercizio 2.4.11.** (1) $[(-3,3)]_{\mathcal{B}} = (1,-2)$; (2) $[(3,-7)]_{\mathcal{B}} = (-3,4)$; (3) $[(3,0)]_{\mathcal{B}} = (1/2,1/2)$.

**Esercizio 2.4.12.** (1) $[(5,-5)]_{\mathcal{B}} = (-1,3)$; (2) $[(-1,3)]_{\mathcal{B}} = (1,-1)$; (3) $[(3,-4)]_{\mathcal{B}} = (-1,2)$.

**Esercizio 2.4.13.** (1) $[(1,0,1)]_{\mathcal{B}} = (1,-1,1)$; (2) $[(3,3,2)]_{\mathcal{B}} = (2,1,0)$; (3) $[(-4,-3,-2)]_{\mathcal{B}} = (-2,-1,-1)$.

**Esercizio 2.4.14.** (1) $[(2,0,3)]_{\mathcal{B}} = (1,1,1)$; (2) $[(-3,3,-2)]_{\mathcal{B}} = (-2,-1,1)$; (3) $[(4,-5,1)]_{\mathcal{B}} = (2,2,-3)$.

**Esercizio 2.4.15.** (1) $[(-3,1,-3)]_{\mathcal{B}} = (-1,-1,1)$; (2) $[(2,2,1)]_{\mathcal{B}} = (1,0,2)$; (3) $[(1,1,1)]_{\mathcal{B}} = (1/3,1/3,1)$.

**Esercizio 2.4.16.** (1) $[(2,1,-1)]_{\mathcal{B}} = (1,1,-1)$; (2) $[(0,-1,0)]_{\mathcal{B}} = (1/4,0,-3/4)$; (3) $[(-8,3,-1)]_{\mathcal{B}} = (-2,1,-2)$.

**Esercizio 2.4.17.** (1) $[(1,0,1,1)]_{\mathcal{B}} = (1,-1,1,0)$; (2) $[(1,1,0,1)]_{\mathcal{B}} = (1,0,0,1)$; (3) $[(0,-1,0,1)]_{\mathcal{B}} = (0,-1,0,1)$.

**Esercizio 2.4.18.** (1) $[(1,1,2,0)]_{\mathcal{B}} = (1,0,1,1)$; (2) $[(-1,1,1,1)]_{\mathcal{B}} = (0,-1,1,0)$; (3) $[(1,1,1,-3)]_{\mathcal{B}} = (1,0,-1,2)$.

**Esercizio 2.4.19.** (1) $\mathbf{w}_1 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (2) $\mathbf{w}_2 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (3) $\mathbf{w}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (4) $\mathbf{w}_4 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (5) $\mathbf{w}_5 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

**Esercizio 2.4.20.** (1) $\mathbf{w}_1 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (2) $\mathbf{w}_2 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (3) $\mathbf{w}_3 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (4) $\mathbf{w}_4 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (5) $\mathbf{w}_5 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

**Esercizio 2.4.21.** (1) $\mathbf{w}_1 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$; (2) $\mathbf{w}_2 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$; (3) $\mathbf{w}_3 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$; (4) $\mathbf{w}_4 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (5) $\mathbf{w}_5 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

**Esercizio 2.4.22.** (1) $\mathbf{w}_1 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$; (2) $\mathbf{w}_2 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$; (3) $\mathbf{w}_3 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$; (4) $\mathbf{w}_4 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (5) $\mathbf{w}_5 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

**Esercizio 2.4.23.** (1) $\mathbf{w}_1 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$; (2) $\mathbf{w}_2 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$; (3) $\mathbf{w}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$; (4) $\mathbf{w}_4 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

**Esercizio 2.4.24.** (1) $q_1(x) \in \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$; (2) $q_2(x) \notin \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$; (3) $q_3(x) \notin \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$; (4) $q_4(x) \in \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$.

**Esercizio 2.4.25.** (1) $A_1$ non è chiuso rispetto alla somma di vettori; (2) $A_2$ è chiuso rispetto alla somma di vettori; (3) $A_3$ è chiuso rispetto alla somma di vettori; (4) $A_4$ non è chiuso rispetto alla somma di vettori.

**Esercizio 2.4.26.** (1) $B_1$ non è chiuso rispetto alla somma di vettori; (2) $B_2$ è chiuso rispetto alla somma di vettori; (3) $B_3$ è chiuso rispetto alla somma di vettori; (4) $B_4$ è chiuso rispetto alla somma di vettori.

**Esercizio 2.4.27.** (1) $C_1$ è chiuso rispetto alla somma di vettori; (2) $C_2$ è chiuso rispetto alla somma di vettori; (3) $C_3$ non è chiuso rispetto alla somma di vettori; (4) $C_4$ è chiuso rispetto alla somma di vettori.

**Esercizio 2.4.28.** (1) $A_1$ è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (2) $A_2$ non è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (3) $A_3$ non è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (4) $A_4$ è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

**Esercizio 2.4.29.** (1) $B_1$ non è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (2) $B_2$ non è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (3) $B_3$ non è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (4) $B_4$ è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

**Esercizio 2.4.30.** (1) $C_1$ non è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (2) $C_2$ è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (3) $C_3$ è chiuso rispetto al prodotto per scalare; (4) $C_4$ non è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

**Esercizio 2.4.31.** (1) $A_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; (2) $A_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; (3) $A_3$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 2.4.32.** (1) $B_1$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; (2) $B_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; (3) $B_3$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 2.4.33.** (1) $C_1$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; (2) $C_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; (3) $C_3$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 2.4.34.** (1) $D_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; (2) $D_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; (3) $D_3$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 2.4.35.** (1) $A_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_1[t]$; (2) $A_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_1[t]$; (3) $A_3$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_1[t]$.

**Esercizio 2.4.36.** (1) $B_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_1[t]$; (2) $B_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_1[t]$; (3) $B_3$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_1[t]$.

**Esercizio 2.4.38.** $S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.39.** $T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.40.** $U$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.41.** $W$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.42.** $Z$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.43.** $S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 2.4.44.** $T$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 2.4.45.** $U$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 2.4.46.** $Z$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 2.4.47.** $A$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$;
una base di $A$ è data da $\mathcal{B} = \{(0, 1)\}$.

**Esercizio 2.4.48.** $B$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 2.4.49.** $U$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
una base di $U$ è data da $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (2, 0, -1)\}$.

**Esercizio 2.4.50.** $W$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.51.** $T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
una base di $T$ è data da $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1)\}$.

**Esercizio 2.4.52.** $T$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.53.** $T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
una base di $T$ è data da $\mathcal{B} = \{(3, 4, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$.

**Esercizio 2.4.54.** $W$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 2.4.55.** $Z$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 2.4.56.** $W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$;
una base di $W$ è data da $\mathcal{B} = \{(x^2, x, 1)\}$.

**Esercizio 2.4.57.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.4.58.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.4.59.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ è data da $\{\mathbf{v}_1\}$.

**Esercizio 2.4.60.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ è $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$.

**Esercizio 2.4.61.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.4.62.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.63.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$.

**Esercizio 2.4.64.** Se $k \neq 8$, allora $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti;
se $k = 8$, allora $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti e una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$.

**Esercizio 2.4.65.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 2.4.66.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.67.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$.

**Esercizio 2.4.68.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.69.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.4.70.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$.

**Esercizio 2.4.71.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.72.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2.4.73.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.74.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti;
una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.75.** Se $k \neq 4$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti;
se $k = 4$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti e una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.76.** Se $k \neq 0$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti;
se $k = 0$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti e una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.77.** Se $k \neq 2$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti;
se $k = 2$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti e una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.78.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 2.4.79.** Se $k \neq 2$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti;
se $k = 2$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti e una base dello spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ è $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

**Esercizio 2.4.80.** Una base di $U$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$; dato $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, l'insieme $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3\}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.81.** Una base di $W$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$. Dati $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, l'insieme $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.82.** Una base di $Z$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$. Dati $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, l'insieme $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.83.** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un insieme di 3 vettori linearmente indipendenti e, quindi, corrisponde a una base di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.84.** Una base di $T$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Dato $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, l'insieme $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3\}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.4.85.** Una base di $U$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Dato $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$, l'insieme $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_4\}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 2.4.86.** Una base di $U$ è data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$. Dato $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, l'insieme $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 2.4.87.** Una base di $S$ è data da $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t)\}$. Dato $q_1(t) = t$, l'insieme $\mathcal{B}' = \{p_1(t), p_2(t), q_1(t)\}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}_2[t]$.

**Esercizio 2.4.88.** Una base di $S$ è data da $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t), p_4(t)\}$. Dato $q_0(t) = 1$, l'insieme $\mathcal{B}' = \{p_1(t), p_2(t), p_4(t), q_0(t)\}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}_3[t]$.

**Esercizio 2.4.89.** $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$; l'insieme vuoto $\varnothing$ è una base di $U_1 \cap U_2$.

**Esercizio 2.4.90.** $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$; $\mathcal{B} = \{(1, -1, -1)\}$ è una base di $U_1 \cap U_2$.

**Esercizio 2.4.91.** $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$; $\mathcal{B} = \{(2, -3, 2)\}$ è una base di $U_1 \cap U_2$.

**Esercizio 2.4.92.** $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$; $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}$ è una base di $W_1 \cap W_2$.

**Esercizio 2.4.93.** $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$; $\mathcal{B} = \{(-1, 1, -3)\}$ è una base di $W_1 \cap W_2$.

**Esercizio 2.4.94.** $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$; $\mathcal{B} = \{(3, 0, 1)\}$ è una base di $W_1 \cap W_2$.

**Esercizio 2.4.95.** $\dim(T_1 \cap T_2) = 1$; $\dim(T_1 + T_2) = 3$;
$\mathcal{B} = \{(1, 1, -1, 1)\}$ è una base di $T_1 \cap T_2$;
$\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1)\}$ è una base di $T_1 + T_2$.

**Esercizio 2.4.96.** $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$; $\dim(U_1 + U_2) = 4$;
$\mathcal{B} = \{(2, 2, -1, -1)\}$ è una base di $U_1 \cap U_2$; $\mathcal{E}_4$ è una base di $U_1 + U_2$.

**Esercizio 2.4.97.** $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$; $\dim(U_1 + U_2) = 4$;
$\mathcal{B} = \{(2, -1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$ è una base di $U_1 \cap U_2$; $\mathcal{E}_4$ è una base di $U_1 + U_2$.

**Esercizio 2.4.98.** $\dim(T_1 \cap T_2) = 1$; $\dim(T_1 + T_2) = 3$;
$\mathcal{B} = \{(1, 0, -2, -1)\}$ è una base di $T_1 \cap T_2$;
$\mathcal{B}' = \{(0, 1, 0, 0), (1, 1, -1, 0), (1, 0, -2, -1)\}$ è una base di $T_1 + T_2$.

**Esercizio 2.4.99.** $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$; $\dim(W_1 + W_2)$;
$\mathcal{B} = \{(0, -1, 1, -2)\}$ è una base di $W_1 \cap W_2$;
$\mathcal{B}' = \{(1, -1, 1, 0), (0, -1, 2, 2), (0, -1, 1, 2)\}$ è una base di $W_1 + W_2$.

**Esercizio 2.4.100.** $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$; $\dim(S_1 + S_2) = 4$;
$\mathcal{B} = \{t^3 - t, t^2 - 1\}$ è una base di $S_1 \cap S_2$; $\mathcal{B}' = \{t^3, t^2, t, 1\}$ è una base di $S_1 + S_2$.

## A.3 Matrici

**Esercizio 3.3.1.** $S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 3.3.2.** $T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 3.3.3.** $U$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 3.3.4.** $S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,3}$.

**Esercizio 3.3.5.** $T$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,3}$.

**Esercizio 3.3.6.** $U$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,3}$.

**Esercizio 3.3.7.** $S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,3}$.

**Esercizio 3.3.8.** $T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,2}$.

**Esercizio 3.3.9.** $U$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,2}$.

**Esercizio 3.3.10.** $T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$; $\dim T = 2$; una base di $T$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Esercizio 3.3.11.** $U$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$; $\dim U = 1$; una base di $U$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Esercizio 3.3.12.** $W$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 3.3.13.** $Z$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,3}$; $\dim Z = 2$; una base di $Z$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Esercizio 3.3.14.**

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.15.**

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.16.**

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.17.**

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.18.**

$$A\,{}^{t}B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}, \quad B\,{}^{t}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.19.**

$${}^{t}AB = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}BC = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -16 & -4 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}CA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$${}^{t}BA = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.20.**

$$A^2 + {}^{t}BC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}AB + C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.21.**

$$A\,{}^{t}B + C^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad {}^{t}BA + D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.22.**

$$A\,{}^{t}A + B\,{}^{t}B + C^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.23.**

$$A(B + C) + C\,{}^{t}CC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.24.**

$$A^2B + 2AB + B\,{}^{t}CC - B = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.25.** Una base di $\mathcal{R}(A)$ è $\mathcal{B} = \{(1,1,2), (0,1,2)\}$;
una base di $C(A)$ è $\mathcal{B}' = \{(1,0), (1,1)\}$.

**Esercizio 3.3.26.** Una base di $\mathcal{R}(B)$ è $\mathcal{B} = \{(1,2,-1)\}$;
una base di $C(B)$ è $\mathcal{B}' = \{(1,0)\}$.

**Esercizio 3.3.27.** Una base di $\mathcal{R}(C)$ è $\mathcal{B} = \{(0,1,0), (1,0,1)\}$;
una base di $C(C)$ è $\mathcal{B}' = \{(0,1,0), (1,0,1)\}$.

**Esercizio 3.3.28.** Una base di $\mathcal{R}(D)$ è $\mathcal{B} = \{(3,-6,1), (2,-4,1)\}$;
una base di $C(D)$ è $\mathcal{B}' = \{(3,2,1), (1,1,0)\}$.

**Esercizio 3.3.29.** Una base di $\mathcal{R}(E)$ è $\mathcal{B} = \{(1,-2,3)\}$;
una base di $C(E)$ è $\mathcal{B}' = \{(1,-2,1)\}$.

**Esercizio 3.3.30.** Una base di $\mathcal{R}(A)$ è $\mathcal{B} = \{(1,-1,4), (0,2,1), (0,0,3)\}$;
una base di $C(A)$ è $\mathcal{B}' = \{(1,0,0), (-1,2,0), (4,1,3)\}$.

**Esercizio 3.3.31.** Una base di $\mathcal{R}(B)$ è $\mathcal{B} = \{(1,-1,1,-1), (1,2,1,2)\}$;
una base di $C(B)$ è $\mathcal{B}' = \{(1,1,2), (-1,2,1)\}$.

**Esercizio 3.3.32.** Una base di $\mathcal{R}(C)$ è $\mathcal{B} = \{(1,4,-3,1), (1,2,-1,2), (2,8,-6,1)\}$;
una base di $C(C)$ è $\mathcal{B}' = \mathcal{E}_3$.

**Esercizio 3.3.33.** Una base di $\mathcal{R}(D)$ è $\mathcal{B} = \{(1,-1,-1), (2,-1,1)\}$;
una base di $C(D)$ è $\mathcal{B}' = \{(1,2,-1,0), (-1,-1,0,-1)\}$.

**Esercizio 3.3.34.** Una base di $\mathcal{R}(E)$ è $\mathcal{B} = \{(2,2,3,3), (-1,-1,2,2), (0,1,1,0)\}$;
una base di $C(E)$ è $\mathcal{B}' = \{(2,-1,7,0), (2,-1,7,1), (3,2,0,1)\}$.

**Esercizio 3.3.35.** $A$ è triangolare superiore se e solo se $k = 2$; $B$ non è triangolare superiore per alcun $k \in \mathbb{R}$; $C$ è triangolare superiore se e solo se $k = 0$.

**Esercizio 3.3.36.** $D$ è triangolare superiore se e solo se $k = 1$; $E$ è triangolare superiore se e solo se $k = 0$; $F$ non è triangolare superiore per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.37.** $A$ è triangolare inferiore se e solo se $k = 0$; $B$ è triangolare inferiore se e solo se $k = -1$; $C$ è triangolare inferiore se e solo se $k = 1$.

**Esercizio 3.3.38.** $D$ non è triangolare inferiore per alcun $k \in \mathbb{R}$; $E$ è triangolare inferiore se e solo se $k = 0$; $F$ non è triangolare inferiore per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.39.** $A$ è diagonale se e solo se $k = 2$; $B$ non è diagonale per alcun $k \in \mathbb{R}$; $C$ è diagonale per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.40.** $D$ è diagonale se e solo se $k = -1$; $E$ non è diagonale per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.41.** $A$ è simmetrica se e solo se $k = 2$; $B$ è simmetrica se e solo se $k = 4$.

**Esercizio 3.3.42.** $C$ è simmetrica se e solo se $k = -2$ o $k = 2$; $D$ non è sim-metrica per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.43.** $A$ è antisimmetrica se e solo se $k = 1$; $B$ non è antisimmetrica per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.44.** $C$ è antisimmetrica se e solo se $k = -1$; $D$ è antisimmetrica per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.45.** Una matrice $B$ tale che $AB \neq BA$ è data da

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3.3.46.** $A$ è idempotente; $B$ è idempotente; $C$ non è idempotente.

**Esercizio 3.3.47.** $A$ è idempotente; $B$ è idempotente; $C$ è idempotente.

**Esercizio 3.3.48.** $A$ è idempotente; $B$ non è idempotente; $C$ non è idempotente.

**Esercizio 3.3.50.** $A$ è idempotente se e solo se $k = 1$.

**Esercizio 3.3.51.** $B$ è idempotente se e solo se $k = 0$ o $k = 1$.

**Esercizio 3.3.53.** Per ogni $m \in \mathbb{N}$,

$$B^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.54.** l'indice di nilpotenza di $C$ è 2.

**Esercizio 3.3.55.** l'indice di nilpotenza di $D$ è 3.

**Esercizio 3.3.58.** $C$ è nilpotente e il suo indice di nilpotenza è 3.

**Esercizio 3.3.59.** $D$ non è nilpotente.

**Esercizio 3.3.60.** $E$ è nilpotente e il suo indice di nilpotenza è 4.

**Esercizio 3.3.61.** $T_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$.

**Esercizio 3.3.62.** $T_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$.

**Esercizio 3.3.63.** $D$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$.

**Esercizio 3.3.64.** $S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$.

**Esercizio 3.3.65.** $Z$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$.

**Esercizio 3.3.66.** $V$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 3.3.67.** $W$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 3.3.68.** $U$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 3.3.69.** $S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 3.3.70.** $T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,3}$.

**Esercizio 3.3.72.**

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Esercizio 3.3.73.** $A_3$ non è invertibile,

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.74.** $B_1$ e $B_3$ non sono invertibili;

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.75.** $C_3$ non è invertibile;

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.76.** $A_1$ è invertibile se e solo se $k \neq -1, 1$; $A_2$ è invertibile per ogni $k \in \mathbb{R}$; $A_3$ non è invertibile per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.77.** $B_1$ è invertibile se e solo se $k \neq -4$; $B_2$ è invertibile se e solo se $k \neq 1/3$; $B_3$ non è invertibile per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.3.78.** $C_1$ è invertibile se e solo se $k \neq -3, 3$; $C_2$ è invertibile se e solo se $k \neq 1$; $C_3$ è invertibile se e solo se $k \neq 0$.

**Esercizio 3.3.79.**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.80.** $A^{\mathrm{t}}B$ è invertibile e

$$(A^{\mathrm{t}}B)^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.81.** $A^{\mathrm{t}}B$ è invertibile e

$$(A^{\mathrm{t}}B)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.82.** $A^{\mathrm{t}}B + C$ è invertibile e

$$(A^{\mathrm{t}}B + C)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.84.**

$$(A^{\mathrm{t}}B)^{-1} + {}^{\mathrm{t}}CC = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.85.**

$$A^{-1}B + B^{-1}C + C^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 20 & 2 \\ 2 & 23 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.86.**

$$(A^{\mathrm{t}}B)^{-1} + (B^{\mathrm{t}}C)^{-1} + (C^{\mathrm{t}}A)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.3.87.** L'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

**Esercizio 3.3.88.** L'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

**Esercizio 3.3.89.** L'insieme delle soluzioni è $\mathcal{S} = \varnothing$.

**Esercizio 3.3.90.** L'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-s & s \\ 2-t & t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Esercizio 3.3.91.** L'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

**Esercizio 3.3.92.**

$$\mathcal{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Esercizio 3.3.93.**

$$\mathcal{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Esercizio 3.3.94.**

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Esercizio 3.3.95.**

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Esercizio 3.3.96.**

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Esercizio 3.3.97.**

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Esercizio 3.3.98.**

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Esercizio 3.3.99.**

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Esercizio 3.3.100.**

$$\mathcal{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

## A.4 Sistemi lineari

**Esercizio 4.3.1.** $\mathcal{S} = \{(0, 0)\}$.

**Esercizio 4.3.2.** $\mathcal{S} = (-1/3, 0) + \langle(-5, 3)\rangle$.

**Esercizio 4.3.3.** $\mathcal{S} = \{(1, 0)\}$.

**Esercizio 4.3.4.** $\mathcal{S} = \langle(-1, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.5.** $\mathcal{S} = (-2, 0, -1) + \langle(2, 1, 0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.6.** $\mathcal{S} = (3/5, 0, 1/5) + \langle(2, 1, 0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.7.** $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$.

**Esercizio 4.3.8.** $\mathcal{S} = \langle(3, 1, 0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.9.** $\mathcal{S} = (1, -1, 0) + \langle(-3, 2, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.10.** $\mathcal{S} = \{(9, -2, -1)\}$.

**Esercizio 4.3.11.** $\mathcal{S} = \emptyset$.

**Esercizio 4.3.12.** $\mathcal{S} = (3, -1, 0) + \langle(-1, 5, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.13.** $\mathcal{S} = (4, 0, 0) + \langle(3, 1, 0), (-2, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.14.** $\mathcal{S} = \emptyset$.

**Esercizio 4.3.15.** $\mathcal{S} = (-1, 2, 0) + \langle(2, -2, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.16.** $\mathcal{S} = (3, 0, 0) + \langle(4, 1, 0), (-7, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.17.** $\mathcal{S} = (-1, 2, 0) + \langle(1, -1, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.18.** $\mathcal{S} = \{(-8, 8, 0)\}$.

**Esercizio 4.3.19.** $\mathcal{S} = (0, -2, 0) + \langle(3, -2, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.20.** $\mathcal{S} = \emptyset$.

**Esercizio 4.3.21.** $\mathcal{S} = (2, 2, -1, 0) + \langle(-2, -6, 4, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.22.** $\mathcal{S} = \langle(-2, 3, 1, 0), (4, -4, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.23.** $\mathcal{S} = \{(-1, 0, 0, 2)\}$.

**Esercizio 4.3.24.** $\mathcal{S} = \emptyset$.

**Esercizio 4.3.25.** $\mathcal{S} = (16, 0, 0, 0) + \langle(4, 1, 0, 0), (-8, 0, 1, 0), (12, 0, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.26.** $\mathcal{S} = \{(-1, 2, 1, 0)\}$.

**Esercizio 4.3.27.** $\mathcal{S} = (1, 3, 0, 0) + \langle(-2, 2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.28.** $\mathcal{S} = \{(-1, 0, 1, 1)\}$.

**Esercizio 4.3.29.** $\mathcal{S} = \emptyset$.

**Esercizio 4.3.30.** $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

**Esercizio 4.3.31.** $\mathcal{S} = (1, 1, 0, 0, -1) + \langle(-1, -1, 1, 0, 0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.32.** $\mathcal{S} = (1,0,0,0,0) + \langle(-2,9,3,0,2),(-1,0,0,3,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.33.** Se $k \neq -1/2$, allora $\mathcal{S} = \{(2/2k+1, -1/(2k+1))\}$;
se $k = -1/2$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$.

**Esercizio 4.3.34.** Se $k \neq -2$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$;
se $k = -2$, allora $\mathcal{S} = (-1,0) + \langle(-1,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.35.** Se $h \neq -1$, allora $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$;
se $h = -1$, allora $\mathcal{S} = \langle(1,0,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.36.** Se $k \neq 0$, allora $\mathcal{S} = \{(1,0,1)\}$;
se $k = 0$, allora $\mathcal{S} = (1/2,1/2,0) + \langle(1/2,-1/2,0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.37.**
$\mathcal{S} = \{(1/(k^2+1), (k^2+k-1)/2(k^2+1), -k/(k^2+1))\}$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4.3.38.** Se $k \neq 0$, allora $\mathcal{S} = \{(-(2k-5)/2k, (k-2)/k, 1/2k)\}$;
se $k = 0$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$.

**Esercizio 4.3.39.** Se $k \neq 4$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$;
se $k = 4$, allora $\mathcal{S} = (-1,2,0) + \langle(-1,1,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.40.** Se $k \neq 0$, allora $\mathcal{S} = (-1/k, (k+1)/k, 0) + \langle(1,-1,k)\rangle$;
se $k = 0$, allora $\mathcal{S} = (1,0,1) + \langle(-1,1,0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.41.** Se $k \neq 0$, allora $\mathcal{S} = \{(-3/k,1,1)\}$;
se $k = 0$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$.

**Esercizio 4.3.42.** Se $k \neq -2$, allora $\mathcal{S} = \{(3/2,-1/2,0)\}$;
se $k = -2$, allora $\mathcal{S} = (3/2,-1/2,0) + \langle(-1/2,1/2,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.43.** Se $h \neq -1,0,1$, allora $\mathcal{S} = \{(0, -1/(h^2-1), h/(h^2-1))\}$;
se $h = 0$, allora $\mathcal{S} = (0,1,0) + \langle(1,0,1)\rangle$; se $h = -1$ o $h = 1$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$.

**Esercizio 4.3.44.** Se $k \neq 0$ e $h \neq 1$, allora $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$;
se $k \neq 0$ e $h = 1$, allora $\mathcal{S} = \langle(-1,-1/k,1)\rangle$; se $k = 0$, allora $\mathcal{S} = \langle(0,1,0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.45.** Se $h \neq 1$, allora
$\mathcal{S} = ((h-4)/(2h-2), 0, -(h^2+2)/(2h-2), (h+2)/(2h-2)) + \langle(1,-1,0,0)\rangle$;
se $h = 1$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$.

**Esercizio 4.3.46.** Se $k \neq 3$, allora $\mathcal{S} = (-3,3,1,0) + \langle(-1,1,0,1)\rangle$;
se $k = 3$, allora $\mathcal{S} = ((k-6)/3, (k+12)/3, 0, 0) + \langle(-k-3,-k-3,3,0),(-1,1,0,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.47.** Se $k \neq 1$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$;
se $k = 1$, allora $\mathcal{S} = (0,2,0,0) + \langle(-1,-2,1,0),(1,1,0,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.48.**
Se $h \neq k$, allora $\mathcal{S} = \{(-k/(h-k), h/(h-k), -k/(h-k), h/(h-k))\}$;
se $h = k \neq 0$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$; se $h = k = 0$, allora $\mathcal{S} = (1,0,1,0) + \langle(-1,1,-1,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.49.** Se $k \neq 1$, allora $\mathcal{S} = \{(3/2,1/2,0,0)\}$;
se $k = 1$, allora $\mathcal{S} = (3/2,1/2,0,0) + \langle(-1,1,2,0),(-2,1,0,1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.50.** Se $k \neq 2$, allora $\mathcal{S} = (3, 0, -1, 0) + \langle(2, 0, -1, 1)\rangle$;
se $k = 2$, allora $\mathcal{S} = (-1, 1, 0, 0) + \langle(-4, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.51.** Se $k \neq 2$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$;
se $k = 2$: $\mathcal{S} = (0, 1, 0, 1) + \langle(-1, 1, 1, 0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.52.** Se $k \neq -1, 0$, allora $\mathcal{S} = \{(-2, -1, 3/k, 2)\}$;
se $k = 0$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$; se $k = -1$, allora $\mathcal{S} = (-2, -1, 0, 0) + \langle(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.53.** Se $k \neq 0, 3$, allora $\mathcal{S} = \{(-1, -1/(k-3), -1, 3)\}$;
se $k = 0$, allora $\mathcal{S} = (-1, 1/3, -1, 0) + \langle(0, 0, 0, 1)\rangle$; se $k = 3$, allora $\mathcal{S} = \varnothing$.

**Esercizio 4.3.54.**
Se $h, k \neq 0$, allora $\mathcal{S} = (h + k, 0, (h + k)/k, 0) + \langle(-1, 1/h, -1/k, 1)\rangle$;
se $h \neq 0$ e $k = 0$, allora $\mathcal{S} = (0, 1, 0, h) + \langle(0, 0, 1, 0)\rangle$;
se $h = 0$ e $k \neq 0$, allora $\mathcal{S} = (k, 0, 1, 0) + \langle(0, 1, 0, 0)\rangle$;
se $h = 0$ e $k = 0$, allora $\mathcal{S} = \langle(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\rangle$.

**Esercizio 4.3.55.** Se $h \neq 0$ e $k \neq -h$, allora $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$;
se $h \neq 0$ e $k = -h$, allora $\mathcal{S} = \langle(0, 1, 0, 1, 0)\rangle$;
se $h = 0$ e $k \neq 0$, allora $\mathcal{S} = \langle(0, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\rangle$;
se $h = 0$ e $k = 0$, allora $\mathcal{S} = \langle(0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\rangle$.

**Esercizio 4.3.56.** $\dim T = 2$; una base di $T$ è $\mathcal{B} = \{(3, 5, 3), (-1, 13, 11)\}$.

**Esercizio 4.3.57.** $\dim U = 1$; una base di $U$ è $\mathcal{B} = \{(2, 4, 3)\}$.

**Esercizio 4.3.58.** $\dim V = 2$; una base di $V$ è $\mathcal{B} = \{(3, -1, 3), (5, 3, 5)\}$.

**Esercizio 4.3.59.** $\dim U = 3$; una base di $U$ è $\mathcal{E}_3$.

**Esercizio 4.3.60.** Se $k \neq 4$, allora $\dim W = 3$; se $k = 4$, allora $\dim W = 2$.

**Esercizio 4.3.61.** Se $h \neq 0, 1$, allora $\dim Z = 4$; se $h = 0$ o $h = 1$, allora $\dim Z = 3$.

**Esercizio 4.3.62.** Se $h \neq 0$, allora $\dim S = 4$; se $h = 0$, allora $\dim S = 2$.

**Esercizio 4.3.63.** Se $k \neq 2$, allora $\dim T = 4$; se $k = 2$, allora $\dim T = 3$.

**Esercizio 4.3.64.**
$\mathcal{B} = \{(2, 4, 1, 0, 1), (0, 5, -5/2, -5, 3/2), (0, 0, 0, 0, -1)\}$ è una base di $U$;
$\mathcal{B}' = \{(2, 4, 1, 0, 1), (0, 5, -5/2, -5, 3/2), (0, 0, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)\}$ è un completamento di $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^5$.

**Esercizio 4.3.65.**
$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, -1, 2), (4, 4, 0, 0, 2), (6, 6, 4, 4, 2)\}$ è una base di $U$; $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0, -1, 2), (4, 4, 0, 0, 2), (6, 6, 4, 4, 2), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ è un completamento di $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^5$.

**Esercizio 4.3.66.**
$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, -1, 1)\}$ è una base di $W$;
$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}$ è un completamento di $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^6$.

**Esercizio 4.3.67.** $\mathcal{B} = \{2t^3 + t^2 + 2t - 1, -t^2 - 3t + 2\}$ è una base di $Z$;
$\mathcal{B}' = \{2t^3 + t^2 + 2t - 1, -t^2 - 3t + 2, t, 1\}$ è un completamento di $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}_3[t]$.

**Esercizio 4.3.68.**

$$Z\colon \begin{cases} 3x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.69.**

$$U\colon \begin{cases} x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.70.**

$$S\colon \begin{cases} x_1 - x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.71.** $\mathbf{v} \in W$;

$$W\colon \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.72.** $\mathbf{w} \in U$;

$$U\colon \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.73.** $W$ è un sottospazio vettoriale di $Z$;

$$Z\colon \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.74.** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \notin Z$; $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in Z$.

**Esercizio 4.3.75.** $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \notin S$; $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \in S$.

**Esercizio 4.3.76.** $A_1, A_2 \in T$; $A_3, A_4 \notin T$.

**Esercizio 4.3.77.** $\mathbf{v}_2 \notin U$; $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \in U$; $\dim(U + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle) = 4$.

**Esercizio 4.3.78.** $\mathbf{v} \in T$ se e solo se $k = -12$.

**Esercizio 4.3.79.** $\mathbf{v} \in U$ se e solo se $k = -2$.

**Esercizio 4.3.80.** $\mathbf{v} \in W$ se e solo se $k = 8$.

**Esercizio 4.3.81.**
$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0,\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$;
$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1, 1)\}$ è una base di $U \cap W$.

**Esercizio 4.3.82.**
$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_5 = 0,\ x_3 - x_4 = 0 \right\}$;
$\mathcal{B} = \{(0, 0, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 0, 1)\}$ è una base di $S \cap T$.

**Esercizio 4.3.83.** $\dim(V \cap Z) = 1$; $\mathcal{B} = \{(1, 2, -3, 2)\}$ è una base di $V \cap Z$.

**Esercizio 4.3.84.** $\mathcal{B} = \{(1, 4, -7, 5)\}$ è una base di $S \cap T$;
$\mathcal{B}' = \{(1, 4, -7, 5), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ è un completamento di $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 4.3.85.** $\mathcal{B} = \{(-1, 1, -1, 1), (-2, 1, -2, 1)\}$ è una base di $U \cap W$;
$\mathcal{B}' = \{(-1, 1, -1, 1), (-2, 1, -2, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ è un completamento di $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 4.3.86.** $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, -1, 0), (0, 2, 0, 0, 3)\}$ è una base di $U \cap W$;
$\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0, -1, 0), (0, 2, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ è un completamento di $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^5$.

**Esercizio 4.3.87.** $\mathcal{B} = \{(3, 1, 4, 5), (0, -4, 5, -29), (0, 0, 11, -69)\}$ è una base di $U + W$;
$\mathcal{B}' = \{(2, 2, 1, 13)\}$ è una base di $U \cap W$.

**Esercizio 4.3.88.** $\dim(S + T) = 3$; $\dim(S \cap T) = 1$;
$\mathcal{B} = \{(1, 3, 4, 0), (1, 2, 2, 1), (-1, 3, 3, 2)\}$ è una base di $S + T$;
$\mathcal{B}' = \{(2, 5, 6, 1)\}$ è una base di $S \cap T$.

**Esercizio 4.3.89.** $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$; $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

**Esercizio 4.3.90.** $U \cap W = U = W$; $\mathcal{B} = \{(5, 4, 3, 2), (6, 2, -2, -6)\}$ è una base di $U \cap W$; la relazione $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ è falsa.

**Esercizio 4.3.91.** $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}$ è una base di $S \cap T$;

$$S \cap T\colon \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.92.** $\mathcal{B} = \{(9, 8, 5, 7)\}$ è una base di $U \cap W$;

$$U \cap W\colon \begin{cases} 8x_1 - 9x_2 = 0, \\ 5x_1 - 9x_3 = 0, \\ 7x_1 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.93.** $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1, -1), (0, 1, 2, 0, 0)\}$ è una base di $U \cap W$;

$$U \cap W\colon \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_5 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4.3.94.** $\dim(U \cap W) = 1$;
$S = \langle (-1, 0, 1, 2) \rangle$ soddisfa la relazione $U + W = U \oplus S$.

**Esercizio 4.3.95.** $\dim(U \cap W) = 2$;
$S = \langle (1, 0, 1, 1) \rangle$ soddisfa la relazione $\mathbb{R}^4 = U \oplus S$.

**Esercizio 4.3.96.** $\mathcal{B} = \{(0, -1, 2, 0)\}$ è una base di $U \cap W$;
$S = \langle (-1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0) \rangle$ soddisfa la relazione $\mathbb{R}^4 = U \oplus S$.

**Esercizio 4.3.97.** $\dim(U \cap W) = 1$;
$\mathcal{B} = \{(-2, 1, -1, 0, -2)\}$ è una base di $U \cap W$;
$S = \langle (-1, 0, 0, -1, 1), (-2, 0, 1, 0, -2) \rangle$ soddisfa la relazione $\mathbb{R}^5 = U \oplus S$.

**Esercizio 4.3.98.** $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ se e solo se $k \neq -2$.

**Esercizio 4.3.99.** $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ se e solo se $k \neq 4$.

**Esercizio 4.3.100.** $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$ se e solo se $k \neq -6, 1$.

## A.5 Applicazioni lineari

**Esercizio 5.4.1.** (1) $f$ non è un'applicazione lineare; (2) $f$ non è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ non è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.2.** (1) $f$ è un'applicazione lineare; (2) $f$ è un'applicazione lineare; (3) $f$ non è un'applicazione lineare; (4) $f$ non è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.3.** (1) $f$ è un'applicazione lineare; (2) $f$ non è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ non è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.4.** (1) $f$ è un'applicazione lineare; (2) $f$ non è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ non è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.5.** (1) $f$ è un'applicazione lineare; (2) $f$ non è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.6.** (1) $f$ non è un'applicazione lineare; (2) $f$ è un'applicazione lineare; (3) $f$ non è un'applicazione lineare; (4) $f$ non è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.7.** (1) $f$ non è un'applicazione lineare; (2) $f$ è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.8.** (1) $f$ è un'applicazione lineare; (2) $f$ non è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ non è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.9.** (1) $f$ è un'applicazione lineare; (2) $f$ non è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.10.** (1) $f$ è un'applicazione lineare; (2) $f$ non è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.11.** (1) $f$ è un'applicazione lineare; (2) $f$ non è un'applicazione lineare; (3) $f$ è un'applicazione lineare; (4) $f$ non è un'applicazione lineare.

**Esercizio 5.4.12.**

$$(1)\quad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix};\qquad (2)\quad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix};$$

$$(3)\quad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}-3&2\\0&2\end{pmatrix};\qquad (4)\quad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}2&-2\\4&4\end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.13.**

$$(1)\quad M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix};\qquad (2)\quad M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-1\end{pmatrix};$$

$$(3)\quad M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}5&1\\5&-1\end{pmatrix};\qquad (4)\quad M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}4&4\\2&0\end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.14.**

$$(1)\quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&-2\end{pmatrix};\qquad (2)\quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}7&6&-5\\-5&-5&4\end{pmatrix};$$

$$(3)\quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}-6&-2&4\\7&3&-4\end{pmatrix};\qquad (4)\quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.15.**

$$(1)\qquad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 5 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix};\qquad (2)\qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & -2\\ \frac{11}{2} & 6\end{pmatrix};$$

$$(3)\qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 6 & -8\\ 4 & -2\end{pmatrix};\qquad (4)\qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\\ 3 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.16.**

$$(1)\qquad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};\qquad (2)\qquad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$(3)\qquad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix};\qquad (4)\qquad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & -4 & 0\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.17.**

$$(1)\qquad M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix};\qquad (2)\qquad M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix};$$

$$(3)\qquad M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix};\qquad (4)\qquad M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.18.** $\mathcal{B}=\{(1,-1,1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{B}'=\{(1,-1,1),(1,1,-2)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$.

**Esercizio 5.4.19.** $\mathcal{B}=\{(1,2,0),(-3,0,2)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{B}'=\{(-1,2,-3)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$.

**Esercizio 5.4.20.** $\mathcal{B}=\varnothing$ è una base di $\operatorname{Ker} f$; $\mathcal{E}_3$ è una base di $\operatorname{Im} f$.

**Esercizio 5.4.21.** $\mathcal{B}=\{(4,-2,1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{B}'=\{(-1,1,2,2),(8,2,6,-8)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$.

**Esercizio 5.4.22.** $\mathcal{B}=\{(-4,-7,10,12)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$; $\mathcal{E}_3$ è una base di $\operatorname{Im} f$.

**Esercizio 5.4.23.** $\operatorname{Ker} f=\langle(-1,1,1)\rangle$ $\mathcal{B}=\{(-1,1,1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\operatorname{Im} f=\langle(1,2,-1,2),(-2,3,2,1)\rangle$; $\mathcal{B}'=\{(1,2,-1,2),(-2,3,2,1)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
$f$ non è né iniettiva, né suriettiva.

**Esercizio 5.4.24.** $\operatorname{Ker} f=\{\mathbf{0}\}$; $\mathcal{B}=\varnothing$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\operatorname{Im} f=\langle(2,-4,-1,1),(1,-2,2,1),(2,-4,-2,2)\rangle$;
$\mathcal{B}'=\{(2,-4,-1,1),(1,-2,2,1),(2,-4,-2,2)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
$f$ è iniettiva, ma non suriettiva.

**Esercizio 5.4.25.** $\operatorname{Ker} f = \langle(-1,3,1,0),(-3,4,0,2)\rangle$;
$\mathcal{B} = \{(-1,3,1,0),(-3,4,0,2)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\operatorname{Im} f = \langle(2,4,6),(2,4,4)\rangle$;
, $\mathcal{B}' = \{(2,4,6),(2,4,4)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
$f$ non è né iniettiva, né suriettiva.

**Esercizio 5.4.26.** $\operatorname{Ker} f = \langle(2,1,0,0),(4,0,-1,2)\rangle$;
$\mathcal{B} = \{(2,1,0,0),(4,0,-1,2)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$; $\operatorname{Im} f = \langle(1,3,-1),(8,2,2)\rangle$;
$\mathcal{B}' = \{(1,3,-1),(8,2,2)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$; $f$ non è né iniettiva, né suriettiva.

**Esercizio 5.4.27.** $\operatorname{Ker} f = \langle(4,-2,-3,3)\rangle$; $\mathcal{B} = \{(4,-2,-3,3)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{E}_3$ è una base di $\operatorname{Im} f$; $f$ è suriettiva, ma non iniettiva.

**Esercizio 5.4.28.** $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$; $\dim(\operatorname{Im} f) = 4$; $\mathcal{B} = \varnothing$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{E}_4$ è una base di $\operatorname{Im} f$; $f$ è un isomorfismo.

**Esercizio 5.4.29.** $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$; $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$;
$\mathcal{B} = \{(-2,2,1,0)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{B} = \{(1,0,-1,1),(0,1,1,-1),(0,0,-1,2)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
$f$ non è né iniettiva, né suriettiva.

**Esercizio 5.4.30.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq 5$.

**Esercizio 5.4.31.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq 5/3$.

**Esercizio 5.4.32.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq 0$.

**Esercizio 5.4.33.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq -1, 1$.

**Esercizio 5.4.34.** $f$ è suriettiva se e solo se $k \neq -1$.

**Esercizio 5.4.35.** $f$ è suriettiva se e solo se $k \neq 0$.

**Esercizio 5.4.36.** $f$ è suriettiva se e solo se $k \neq 16$.

**Esercizio 5.4.37.** $f$ è iniettiva se e solo se $k \neq 16$.

**Esercizio 5.4.38.** $f$ è iniettiva se e solo se $k \neq 16$.

**Esercizio 5.4.39.** $f$ è iniettiva se e solo se $k \neq 0, 1$.

**Esercizio 5.4.40.** $f^{-1}(\mathbf{w}) = (2,1,0) + \langle(1,-1,1)\rangle$.

**Esercizio 5.4.41.** $f^{-1}(\mathbf{w}) = \varnothing$.

**Esercizio 5.4.42.** $f^{-1}(\mathbf{w}) = \{(2,1/2,-1)\}$.

**Esercizio 5.4.43.** $f^{-1}(\mathbf{w}) = (7,-1,-1,0) + \langle(-8,2,1,1)\rangle$.

**Esercizio 5.4.44.** $f^{-1}(\mathbf{w}) = (2,-3,0,0) + \langle(-1,2,1,0),(-3,-1,0,1)\rangle$.

**Esercizio 5.4.45.** $f^{-1}(W)\colon\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$.

**Esercizio 5.4.46.** $f^{-1}(W)\colon\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$.

**Esercizio 5.4.47.** $f^{-1}(W): \ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.$

**Esercizio 5.4.48.** $f^{-1}(W): \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$

**Esercizio 5.4.49.** $f^{-1}(W): \ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0.$

**Esercizio 5.4.50.** Non esiste un'applicazione lineare che soddisfi tali condizioni.

**Esercizio 5.4.51.** Una funzione che soddisfa tali condizioni è definita da

$$f(x, y, z) = (z, x, 0),$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

**Esercizio 5.4.52.** Non esiste un'applicazione lineare che soddisfi tali condizioni.

**Esercizio 5.4.53.** Una funzione che soddisfa tali condizioni è definita da

$$f(x, y, z) = (3x + 2y, y - 2z, x + 3z)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

**Esercizio 5.4.54.** Una funzione che soddisfa tali condizioni esiste se e solo se $k = 4$.

**Esercizio 5.4.55.** Una funzione che soddisfa tali condizioni esiste se e solo se $k = 1$.

**Esercizio 5.4.56.** Una funzione che soddisfa tali condizioni esiste se e solo se $k = 2$.

**Esercizio 5.4.57.** Una funzione che soddisfa tali condizioni esiste se e solo se $k = 0$.

**Esercizio 5.4.58.** $A$ e $B$ sono tra loro simili.

**Esercizio 5.4.59.** $A$ e $B$ non sono tra loro simili.

**Esercizio 5.4.60.** $A$ e $B$ non sono tra loro simili.

**Esercizio 5.4.61.** $A$ e $B$ sono tra loro simili.

**Esercizio 5.4.62.**

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{E}\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.63.**

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.64.**

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.65.**

$$M_{\mathcal{B}C}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.66.**

$$M_{\mathcal{B}C}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.67.**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.68.**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.69.**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.70.**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.71.**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 5 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.72.**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.73.**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.74.** $f^{-1}(W)\colon\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$;

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.75.**

$$(2) \qquad M_{\mathcal{E}_2[t]\mathcal{E}_4[t]}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$; $\operatorname{Im} f = \langle t^4 - t^2, t^3 - t, t^2 - 1\rangle$;
(4) $\mathcal{B} = \{t^4 - 1, t^3 + t^2 - t - 1\}$ è una base di $U \cap \operatorname{Im} f$.

**Esercizio 5.4.76.**
(1) $\mathcal{B} = \{(-7, -1, 3)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$, $C = \{(2, 2, 2), (-2, 4, -8)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
(2) $U = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus U$, $\mathcal{D} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ è una base di $U$;

$$(3) \qquad M_{\mathcal{D}C}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.77.** $g(x_1, x_2, x_3) = (-9x_1, 2x_1, x_1)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

**Esercizio 5.4.78.**

$$(1) \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{C\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -12 \\ 15 & 0 & 20 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_C(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \qquad M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}C}(g) = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_{C\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_C(g) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$(3) \qquad M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -5 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}C}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$M_{C\mathcal{B}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 \\ -15 & 0 & -20 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_C(g \circ f) = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 20 \\ -6 & 0 & -8 \\ -12 & 0 & -16 \end{pmatrix};$$

$$(4) \qquad M_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 15 & -9 & 3 \\ 25 & 15 & -5 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}C}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{C\mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 10 & -10 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad M_{C}(f \circ g) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.79.**

$$(1) \qquad M_{\mathcal{B}C}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \qquad M_{C\mathcal{D}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

(4) $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \langle(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\rangle$; $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2$.

**Esercizio 5.4.80.**

$$(1) \qquad M_{\mathcal{B}C}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ -12 & 2 & -11 & -1 \\ -29 & 3 & -29 & -4 \end{pmatrix}; \quad (2) \qquad M_{C\mathcal{D}}(g) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -9 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ -8 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

(4) $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \langle(-9, -3, 29, 0), (5, -8, 0, 29)\rangle$; $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2$.

**Esercizio 5.4.81.** $f$ è un isomorfismo;

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.82.**

$$(1) \qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k+2 & k & -4 \\ k+3 & k+1 & -6 \end{pmatrix};$$

(2) $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq 0$;
(3) Se $k = 0$, allora $\mathcal{B} = \{(2, 0, 1)\}$ è una base di $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathcal{B} = \{(0, 2, 3), (1, 0, 1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\, f$.

**Esercizio 5.4.83.**

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

$f$ è iniettiva.

**Esercizio 5.4.84.**

$$M_{\mathcal{E}_{2,2}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.85.**
Se $h \neq 6$ e $k \neq 27$, allora una base di $\operatorname{Ker} f$ è data da $\mathcal{B} = \{(-3, 0, 1, 0)\}$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 3), (3, h, 9), (9, 18, k)\}$;
se $h \neq 6$ e $k = 27$, allora una base di $\operatorname{Ker} f$ è data da $\mathcal{B} = \{(-3, 0, 1, 0), (-9, 0, 0, 1)\}$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 3), (3, h, 9)\}$;
se $h = 6$ e $k \neq 27$, allora una base di $\operatorname{Ker} f$ è data da $\mathcal{B} = \{(-3, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0)\}$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 3), (9, 18, k)\}$;
se $h = 6$ e $k = 27$, allora una base di $\operatorname{Ker} f$ è $\mathcal{B} = \{(-3, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-9, 0, 0, 1)\}$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 3)\}$.

**Esercizio 5.4.86.**

(2) $$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

(3) $\mathcal{D} = \{(t^2, t^2), (t, t), (1, 1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$, $\mathcal{C}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;

(4) $$M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.87.** $\phi_A$ non è suriettiva.

**Esercizio 5.4.88.**

(2) $$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

(3) $\mathcal{C} = \{1\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$, $\mathcal{D} = \{t^4, t^3, t^2, t, 1\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;

(4) $$M_{\mathcal{B}}(D_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.89.**

$$(2) \qquad M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(3) $\mathcal{C} = \{t, 1\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$ e $\mathcal{E}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}_5[t]$, $\mathcal{D} = \{t^3, t^2, t, 1\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$ e $\mathcal{E}$ è un suo completamento a una base di $\mathbb{R}_5[t]$;

$$(4) \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.4.90.** $\mathcal{B} = \{(6, 2, 3, 0), (3, 2, 0, 3)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{B}' = \{(1, 3, 1, 4), (-3, -6, 0, -6)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$; $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$;
$f^{-1}(W)\colon\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$; $\mathcal{C} = \{(3, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ è una base di $f^{-1}(W)$.

**Esercizio 5.4.91.** (1) $\mathcal{B} = \{(-1, -1, 1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{C} = \{(-2, 2, 0), (4, 2, 3)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
(2) $U\colon\ x_1 + x_2 = 0$; $\mathcal{C} = \{(1, -1, 2), (1, -1, -2)\}$ è una base di $U$;
(3) $\mathcal{D} = \{-2, 2, 0\}$ è una base di $U \cap \operatorname{Im} f$; $f^{-1}(U)\colon\ x_2 + x_3 = 0$;
(4) $\dim\big(f\big(f^{-1}(U)\big)\big) = 1$.

**Esercizio 5.4.92.** (1) $\mathcal{B} = \{(2, 2, 5)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{B}' = \{(1, 4, 3, 1), (-1, 6, 2, 4)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
(2) $\dim W = 3$; $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ è una base di $W$;
(3) $\mathcal{D} = \{0, 2, 1, 1\}$ è una base di $W \cap \operatorname{Im} f$; $f^{-1}(W)\colon\ x_1 - x_2 = 0$.

**Esercizio 5.4.93.** (1) $\mathcal{C} = \{(-1, -2, 1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{C}' = \{(2, -4, 0), (-1, 0, -3)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
(2) $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(2, -4, 0), (0, 1, 0), (-1, 0, -3)\}$ sono due basi tali che $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ è della forma richiesta.

**Esercizio 5.4.94.** (1) $\mathcal{C} = \{(-2, 1, 0, 0), (-2, 0, 3, 1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{C}' = \{(2, 1, -3), (1, 0, -2)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
(2) Due basi tali che $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ è della forma richiesta sono

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 0), (-2, 0, 3, 1)\},$$
$$\mathcal{B}' = \{(2, 1, -3), (1, 0, -2), (0, 0, 1)\}.$$

**Esercizio 5.4.95.** (1) $\mathcal{C} = \{(-2, 2, 3, 0), (-4, 0, 0, 1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$\mathcal{C}' = \{(2, 1, 0, 3), (2, -2, 6, 0)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
(2) Due basi tali che $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ è della forma richiesta sono

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (-1, 2, 3, 0), (0, 1, 0, 0), (-4, 1, 0, 1)\},$$
$$\mathcal{B}' = \{(0, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 3), (0, 0, 0, 1), (2, -2, 6, 0)\}.$$

**Esercizio 5.4.96.** Non è possibile determinare le basi che soddisfano le proprietà richieste.

**Esercizio 5.4.97.**

$$(1) \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \qquad M_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(f^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^k = O, \ k \geq 4;$$

(3) $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$; $C_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f^2$; $C_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\operatorname{Im} f^2$;
$\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f^3$; $C_3 = \{\mathbf{v}_1\}$ è una base di $\operatorname{Im} f^3$;
$\mathcal{B}_k = \mathcal{E}_4$ è una base di $\operatorname{Ker} f^k$ e $C_k = \emptyset$ è una base di $\operatorname{Im} f^k$, per ogni $k \geq 4$;
(4) $f^{-1}(\mathbf{v}_1) = \{\mathbf{v}_2\}$; $(f^2)^{-1}(\mathbf{v}_1) = \{\mathbf{v}_3\}$; $(f^3)^{-1}(\mathbf{v}_1) = \{\mathbf{v}_4\}$; $(f^k)^{-1}(\mathbf{v}_1) = \emptyset$ per ogni $k \geq 4$.

**Esercizio 5.4.98.**

$$(1) \qquad M_{\mathcal{E}_3}(f^n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\};$$

$$(2) \qquad M_{\mathcal{E}_3}(f^n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -n+2 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\};$$

(3) $\mathcal{B} = \{(1,0,0)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f^n$; $C_n = \{(0,1,0),(1,n,1)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f^n$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$;
(4) $\operatorname{Im} f^n\colon\ x_1 - x_3 = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

**Esercizio 5.4.99.** (1) $\mathcal{B} = \{(-2,3,1,0),(-1,1,0,1)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$;
$C = \{(1,1,4),(0,2,4)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$;
(2) $\mathcal{D} = \{(-1,1,0,1)\}$ è una base di $W \cap \operatorname{Ker} f$; la relazione $\mathbb{R}^4 = W \oplus \operatorname{Ker} f$ è falsa;

$$(3) \qquad W \cap \operatorname{Ker} f\colon \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_1 + x_4 = 0; \end{cases}$$

(4) $\dim\big(f(W \cap \operatorname{Ker} f)\big) = 0$.

**Esercizio 5.4.100.**
$\mathcal{A} = \left\{ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(1,1,0) = \mathbf{0},\ f(1,0,1) = \mathbf{0},\ f(1,0,0) = (1,0,-1) \right\}$.

## A.6 Il determinante

**Esercizio 6.3.1.** $B_1$ e $B_2$ sono sottomatrici di $A$; $B_3$ e $B_4$ non sono sottomatrici di $A$.

**Esercizio 6.3.2.** $B_2$ e $B_4$ sono sottomatrici di $A$; $B_1$ e $B_3$ non sono sottomatrici di $A$.

**Esercizio 6.3.3.** $B_1$ e $B_4$ sono sottomatrici di $A$; $B_2$ e $B_3$ non sono sottomatrici di $A$.

**Esercizio 6.3.4.** $B_3$ e $B_4$ sono sottomatrici di $A$; $B_1$ e $B_2$ non sono sottomatrici di $A$.

**Esercizio 6.3.5.** $B_1$ e $B_3$ sono sottomatrici di $A$; $B_2$ non è una sottomatrice di $A$.

**Esercizio 6.3.6.** $B_2$ e $B_3$ sono sottomatrici di $A$; $B_1$ non è una sottomatrice di $A$.

**Esercizio 6.3.7.** $\det A = 1$; $\det B = 10$; $\det C = 0$.

**Esercizio 6.3.8.** $\det A = 7$; $\det B = 0$; $\det C = 0$.

**Esercizio 6.3.9.** $\det A = 0$; $\det B = -2$; $\det C = 2$.

**Esercizio 6.3.10.** $\det A = 128$; $\det B = 72$; $\det C = 16$.

**Esercizio 6.3.11.** $\det A = 2$; $\det B = -8$.

**Esercizio 6.3.12.** $\det A = 0$; $\det B = 9$.

**Esercizio 6.3.13.** $\det A = -40$; $\det B = 0$.

**Esercizio 6.3.14.** $\det A = 24$; $\det B = 1$.

**Esercizio 6.3.15.** $\det A = -3$; $\det B = -14$.

**Esercizio 6.3.16.** $\det A = 0$; $\det B = 0$.

**Esercizio 6.3.17.** $\det A = -5$; $\det B = 4$.

**Esercizio 6.3.18.** $\det A = -20$; $\det B = 1001$.

**Esercizio 6.3.19.** $\det A = 16$; $\det B = 5$.

**Esercizio 6.3.20.** $\det A = -10$; $\det B = -6$.

**Esercizio 6.3.21.** $\det A = 2$; $\det B = 0$.

**Esercizio 6.3.22.** $\det A = -3$; $\det B = -6$.

**Esercizio 6.3.23.** $\det A = 7$; $\det B = -15$.

**Esercizio 6.3.24.** $\det A = 0$; $\det B = 20$.

**Esercizio 6.3.25.** $\det A = 0$; $\det B = 10000$.

**Esercizio 6.3.26.** $\det A = -12$; $\det B = -5$.

**Esercizio 6.3.27.** $\det A = 0$; $\det B = 5$.

**Esercizio 6.3.28.** $\det A = 1$; $\det B = -16$.

**Esercizio 6.3.29.**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5; \quad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3; \quad \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

**Esercizio 6.3.30.** $\det A_{11} = 2$; $\det A_{12} = -1$; $\det A_{13} = 2$; $\det A_{21} = -6$; $\det A_{22} = 5$; $\det A_{23} = -2$; $\det A_{31} = -2$; $\det A_{32} = -1$; $\det A_{33} = -2$.

**Esercizio 6.3.31.**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 4, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 6, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -5,$$
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

**Esercizio 6.3.32.**

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -24, \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = -32, \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -12$$

**Esercizio 6.3.33.** $\det A_{11} = 0$; $\det A_{12} = 0$; $\det A_{13} = 0$; $\det A_{14} = 0$; $\det A_{21} = -1$; $\det A_{22} = 1$; $\det A_{23} = 0$; $\det A_{24} = -1$; $\det A_{31} = 1$; $\det A_{32} = -1$; $\det A_{33} = 0$; $\det A_{34} = 1$; $\det A_{41} = 0$; $\det A_{42} = 0$; $\det A_{43} = 0$; $\det A_{44} = 0$.

**Esercizio 6.3.34.** $\mathrm{r}(A) = 2$; $\mathrm{r}(B) = 1$.

**Esercizio 6.3.35.** $\mathrm{r}(A) = 3$; $\mathrm{r}(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.36.** $\mathrm{r}(A) = 2$; $\mathrm{r}(B) = 1$.

**Esercizio 6.3.37.** $\mathrm{r}(A) = 2$; $\mathrm{r}(B) = 3$.

**Esercizio 6.3.38.** $\mathrm{r}(A) = 2$; $\mathrm{r}(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.39.** $\mathrm{r}(A) = 3$; $\mathrm{r}(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.40.** $\mathrm{r}(A) = 1$; $\mathrm{r}(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.41.** $\mathrm{r}(A) = 3$; $\mathrm{r}(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.42.** Se $k \neq 0$, allora $\mathrm{r}(A) = 3$; se $k = 0$, allora $\mathrm{r}(A) = 2$;
se $k \neq -3/4$, allora $\mathrm{r}(B) = 3$; se $k = -3/4$, allora $\mathrm{r}(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.43.** Se $k \neq -5$, allora $\mathrm{r}(A) = 2$; se $k = -5$, allora $\mathrm{r}(A) = 1$;
se $k \neq 4$, allora $\mathrm{r}(B) = 3$; se $k = 4$, allora $\mathrm{r}(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.44.** $r(A) = 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 2$, allora $r(B) = 3$;
se $k = 2$, allora $r(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.45.** Se $k \neq -1$, allora $r(A) = 3$; se $k = -1$, allora $r(A) = 2$;
se $k \neq -2, 1$, allora $r(B) = 3$; se $k = -2$, allora $r(B) = 2$; se $k = 1$, allora $r(B) = 1$.

**Esercizio 6.3.46.** Se $k \neq -1, 2$, allora $r(A) = 4$;
se $k = -1$ o $k = 2$, allora $r(A) = 3$.

**Esercizio 6.3.47.** Se $k \neq -3, 3$, allora $r(B) = 4$;
se $k = -3$, allora $r(B) = 3$; se $k \neq 3$, allora $r(B) = 2$.

**Esercizio 6.3.48.** Se $k \neq 0, 1$, allora $r(A) = 3$;
se $k = 0$ o $k = 1$, allora $r(A) = 2$.

**Esercizio 6.3.49.** Se $k \neq -1, 0, 1$, allora $r(A) = 4$;
se $k = -1$ o $k = 1$, allora $r(A) = 3$; se $k = 0$, allora $r(A) = 2$.

**Esercizio 6.3.50.** Se $k \neq 0$ e $h \neq 0$, allora $r(A) = 4$;
se $k \neq 0$ e $h = 0$, allora $r(A) = 3$; se $k = 0$, allora $r(A) = 1$.

**Esercizio 6.3.51.** Se $k \neq 0$, allora $r(A) = 4$; se $k = 0$, allora $r(A) = 3$.

**Esercizio 6.3.52.** Se $k \neq -1, 0$, allora $r(B) = 5$;
se $k = -1$ o $k = 0$, allora $r(B) = 4$.

**Esercizio 6.3.53.**

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.3.54.** $A$ non è invertibile;

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.3.55.** $B$ non è invertibile;

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.3.56.**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.3.57.**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.3.58.**
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.3.59.**
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.3.60.** $A$ non è invertibile.

**Esercizio 6.3.61.** $\det A = 1$ se e solo se $k = 0$.

**Esercizio 6.3.62.** $\det B = 2$ se e solo se $k = 1$ o $k = 2$.

**Esercizio 6.3.63.** $\det C = 4$ se e solo se $k = -2$ o $k = -1$.

**Esercizio 6.3.64.** $\det D = -2$ se e solo se $k = -1$ o $k = 0$.

**Esercizio 6.3.65.** $\det E = -8$ se e solo se $k = -2$ o $k = 1$ o $k = 2$.

**Esercizio 6.3.66.** $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $k \neq -3$.

**Esercizio 6.3.67.** $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $k \neq 3$.

**Esercizio 6.3.68.** $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $k \neq -7$ e $k \neq 1$.

**Esercizio 6.3.69.** $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 2$.

**Esercizio 6.3.70.** $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ se e solo se $k \neq -\sqrt{2}$, $k \neq \sqrt{2}$ e $k \neq 3$.

**Esercizio 6.3.71.** $\mathcal{S} = \{(0, 0, 2)\}$.

**Esercizio 6.3.72.** $\mathcal{S} = \{(1, -1/4, 3/4)\}$.

**Esercizio 6.3.73.** $\mathcal{S} = \{(0, 1/4, -1/6)\}$.

**Esercizio 6.3.74.** $\mathcal{S} = \{(1, -3/5, 9/5)\}$.

**Esercizio 6.3.75.** $\mathcal{S} = \{(-3/7, 3, 0)\}$.

**Esercizio 6.3.76.** $\mathcal{S} = \{(1/7, 1/7, 1/7)\}$.

**Esercizio 6.3.77.** $\mathcal{S} = \{(1, 0, 2, 0)\}$.

**Esercizio 6.3.78.** $\mathcal{S} = \{(-3, 3, -2, -1)\}$.

**Esercizio 6.3.79.** $\mathcal{S} = \{(-1, -1/2, -2, -3)\}$.

**Esercizio 6.3.80.** $\mathcal{S} = \{(1, 1/2, -1, 1/2)\}$.

**Esercizio 6.3.81.** $\mathcal{S} = \{(-1, 2, 0, 0, 1)\}$.

**Esercizio 6.3.82.** $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0, -1, 1)\}$.

**Esercizio 6.3.83.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq -1$ e $k \neq 1$.

**Esercizio 6.3.84.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq -1$, $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

**Esercizio 6.3.85.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq -\sqrt{5}$ e $k \neq \sqrt{5}$.

**Esercizio 6.3.86.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq -1$ e $k \neq 1$.

**Esercizio 6.3.87.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

**Esercizio 6.3.88.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq 0$.

**Esercizio 6.3.89.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $k \neq -2$ e $k \neq 2$.

**Esercizio 6.3.90.** $f$ è un isomorfismo se e solo se $h \neq -1$ e $k \neq 0$.

**Esercizio 6.3.91.** $f$ è un isomorfismo per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 6.3.92.** $\det A = 1$ per ogni $h, k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 6.3.93.** (1) $\det(kA) = 2k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$;
(2) $\det(A^k) = 2^k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$; (3) $\det(-A) = (-1)^n \cdot 2$.

**Esercizio 6.3.94.** L'affermazione non è vera.

**Esercizio 6.3.95.** $\det N = 0$.

**Esercizio 6.3.96.** $\det A = 1$.

**Esercizio 6.3.97.** $\det A = -1$ oppure $\det A = 1$; considerando le matrici $I_3$ e $-I_3$, si ha $\det I_3 = 1$ e $\det(-I_3) = -1$.

**Esercizio 6.3.98.** Non esiste una tale matrice.

**Esercizio 6.3.99.** Se $n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora $\det A = (-1)^k$;
se $n = 2k + 1$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora $\det A = 0$.

**Esercizio 6.3.100.** $\det A = 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

## A.7 Autovalori e autovettori

**Esercizio 7.3.1.** $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono autovettori; $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_4$ non sono autovettori.

**Esercizio 7.3.2.** $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ sono autovettori; $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono autovettori.

**Esercizio 7.3.3.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori; $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ non sono autovettori.

**Esercizio 7.3.4.** $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ sono autovettori; $\mathbf{v}_2$ non è un autovettore.

**Esercizio 7.3.5.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori; $\mathbf{v}_3$ non è un autovettore.

**Esercizio 7.3.6.** $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono autovettori.

**Esercizio 7.3.7.** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ sono autovettori; $\mathbf{v}_2$ non è un autovettore.

**Esercizio 7.3.8.** Se $k = 0$, allora $\mathbf{v}$ è un autovettore relativo all'autovalore $-1$;
se $k \neq 0$, allora $\mathbf{v}$ non è un autovettore.

**Esercizio 7.3.9.** Se $k = 3$, allora $\mathbf{v}$ è un autovettore relativo all'autovalore $-1$;
se $k \neq 3$, allora $\mathbf{v}$ non è un autovettore.

**Esercizio 7.3.10.** Se $k = 1$, allora $\mathbf{v}$ è un autovettore relativo all'autovalore 1;
se $k \neq 1$, allora $\mathbf{v}$ non è un autovettore.

**Esercizio 7.3.11.** Se $k = -1$, allora $\mathbf{v}$ è un autovettore relativo all'autovalore $-2$;
se $k \neq -1$, allora $\mathbf{v}$ non è un autovettore.

**Esercizio 7.3.12.** 2 è un autovalore per $f$ se e solo se $k = 0$.

**Esercizio 7.3.13.** 1 è un autovalore di $f$ se e solo se $k = 3/4$.

**Esercizio 7.3.14.** $-2$ è un autovalore per $f$ se e solo se $k = -\sqrt{6}$ o $k = \sqrt{6}$.

**Esercizio 7.3.15.** 6 è un autovalore per $f$ se e solo se $k = 0$ o $k = -3/2$.

**Esercizio 7.3.16.** $-2$ è un autovalore per $f$ se e solo se $k = -2$.

**Esercizio 7.3.17.** $-1$ è un autovalore per $f$ se e solo se $k = -3$ o $k = 4/3$.

**Esercizio 7.3.18.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$ e 3;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-1} = \langle(1,-1)\rangle$ e $V_3 = \langle(1,1)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(1,-1),(1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.19.** Gli autovalori di $f$ sono $-3$ e 2;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-3} = \langle(1,-1)\rangle$ e $V_2 = \langle(-4,9)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(1,-1),(-4,9)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.20.** $f$ non ha autovalori reali; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.21.** Gli autovalori di $f$ sono $-3$ e 0;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-3} = \langle(3,-1,2)\rangle$, $V_0 = \langle(1,0,1)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.22.** Gli autovalori di $f$ sono 1, 2 e 3;
gli autospazi di $f$ sono $V_1 = \langle(3,-4,1)\rangle$, $V_2 = \langle(-1,1,0)\rangle$, $V_3 = \langle(2,-4,1)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(3,-4,1),(-1,1,0),(2,-4,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.23.** Gli autovalori di $f$ sono 1 e $-2$;
gli autospazi di $f$ sono $V_1 = \langle(1,-1,1)\rangle$, $V_{-2} = \langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.24.** L'unico autovalore di $f$ è 2, con autospazio
$V_2 = \langle(1,0,0),(0,-1,1)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.25.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$ e $2$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-1} = \langle(0,1,0)\rangle$ e $V_2 = \langle(-2,-3,1)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.26.** L'unico autovalore di $f$ è $-2$;
l'unico autospazio di $f$ è $V_{-2} = \langle(-2,-1,1)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.27.** Gli autovalori di $f$ sono $-2$, $0$ e $1$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-2} = \langle(1,-1,1)\rangle$, $V_0 = \langle(1,2,0)\rangle$, $V_1 = \langle(1,1,0)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(1,2,0),(1,1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.28.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$, $1$ e $2$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-1} = \langle(-1,1,1)\rangle$, $V_1 = \langle(1,1,0)\rangle$, $V_2 = \langle(-1,-2,1)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(-1,1,1),(1,1,0),(-1,-2,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.29.** Gli autovalori di $f$ sono $0$ e $2$;
gli autospazi di $f$ sono $V_0 = \langle(1,1,0),(-2,0,1)\rangle$, $V_2 = \langle(-1,-1,1)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(-2,0,1),(-1,-1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.30.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$ e $3$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-1} = \langle(3,5,1)\rangle$, $V_3 = \langle(1,2,0)\rangle$;
$f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.31.** L'unico autovalore di $f$ è $2$,
con autospazio $V_2 = \langle(-1,0,1)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.32.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$ e $4$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-1} = \langle(1,-1,2)\rangle$, $V_4 = \langle(0,1,0),(1,0,1)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(1,-1,2),(0,1,0),(1,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.33.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$ e $0$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-1} = \langle(-3,1,2)\rangle$, $V_0 = \langle(-2,5,0),(-6,0,5)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(-3,1,2),(-2,5,0),(-6,0,5)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.34.** Gli autovalori di $f$ sono $-3$, $-1$ e $3$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-3} = \langle(0,1,1)\rangle$, $V_{-1} = \langle(1,1,0)\rangle$, $V_3 = \langle(1,3,4)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(0,1,1),(1,1,0),(1,3,4)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.35.** Gli autovalori di $f$ sono $-2$ e $-1$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-2} = \langle(1,-1,1)\rangle$, $V_{-1} = \langle(6,-5,4)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.36.** Gli autovalori di $f$ sono $1$ e $2$;
gli autospazi di $f$ sono $V_1 = \langle(1,2,0),(-1,0,2)\rangle$, $V_2 = \langle(1,2,1)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(1,2,0),(-1,0,2),(1,2,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.37.** Gli autovalori di $f$ sono $-2$, $-1$, $1$ e $2$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-2} = \langle(-1,0,-1,1)\rangle$, $V_{-1} = \langle(-1,-1,1,0)\rangle$, $V_1 = \langle(1,2,-3,2)\rangle$, $V_2 = \langle(0,1,-1,1)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(-1,0,-1,1),(-1,-1,1,0),(1,2,-3,2),(0,1,-1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.38.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$ e $1$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-1} = \langle(-3,0,-2,2)\rangle$, $V_1 = \langle(0,1,0,0),(0,0,-1,2)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.39.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$, $0$ e $2$;
$V_{-1} = \langle(-2,0,3,0)\rangle$, $V_0 = \langle(-1,0,2,0),(0,-3,0,2)\rangle$, $V_2 = \langle(0,-4,0,3)\rangle$ sono gli autospazi di $f$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(-2,0,3,0),(-1,0,2,0),(0,-3,0,2),(0,-4,0,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.40.** Gli autovalori di $f$ sono $-2$ e $2$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-2} = \langle(-1,3,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$, $V_2 = \langle(-1,2,0,0)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(-1,3,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(-1,2,0,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.41.** Gli autovalori di $f$ sono $-2$ e $0$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-2} = \langle(0,0,1,2)\rangle$, $V_0 = \langle(-1,-1,1,0),(1,1,0,1)\rangle$;
$f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.42.** Gli autovalori di $f$ sono $1$ e $3$;
gli autospazi di $f$ sono $V_1 = \langle(-2,1,0,0),(-2,0,0,1)\rangle$, $V_3 = \langle(-3,3,1,0),(3,-3,0,2)\rangle$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(-1,3,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(-1,2,0,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.43.** Gli autovalori di $f$ sono $-3$, $0$ e $2$;
$V_{-3} = \langle(0,0,1,0)\rangle$, $V_0 = \langle(2,0,3,3)\rangle$, $V_2 = \langle(1,1,1,0),(0,-1,0,1)\rangle$ sono gli autospazi di $f$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(0,0,1,0),(2,0,3,3),(1,1,1,0),(0,-1,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.44.** $f$ non ha autovalori reali; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.45.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$, $1$ e $3$;
$V_{-1} = \langle(-3,2,1,0),(0,0,0,1)\rangle$, $V_1 = \langle(1,0,1,1)\rangle$, $V_3 = \langle(0,0,2,3)\rangle$ sono gli autospazi di $f$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(-3,2,1,0),(0,0,0,1),(1,0,1,1),(0,0,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.46.** Gli autovalori di $f$ sono $-1$ e $2$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-1} = \langle(3,-1,1,0),(-2,1,0,1)\rangle$, $V_2 = \langle(-2,1,0,2)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.47.** Gli autovalori di $f$ sono $-2$, $0$ e $1$;
gli autospazi di $f$ sono $V_{-2} = \langle(1,-2,1,1)\rangle$, $V_0 = \langle(0,-1,1,2)\rangle$, $V_1 = \langle(0,-1,2,4)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.48.** Gli autovalori di $f$ sono $-4$, $-1$, $2$ e $3$;
$V_{-4} = \langle(0,0,1,1)\rangle$, $V_{-1} = \langle(0,7,3,0)\rangle$, $V_2 = \langle(0,1,0,0)\rangle$, $V_3 = \langle(-1,1,2,2)\rangle$ sono gli autospazi di $f$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(0,0,1,1),(0,7,3,0),(0,1,0,0),(-1,1,2,2)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.49.** L'unico autovalore di $f$ è $1$;
l'unico autospazio di $f$ è $V_1 = \langle(-1,1,2,2)\rangle$; $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.50.** Gli autovalori di $f$ sono $0$ e $1$;
$V_0 = \langle(-3,-1,5,0),(-1,-7,0,5)\rangle$, $V_1 = \langle(0,0,1,0),(-1,-2,0,1)\rangle$ sono gli autospazi di $f$;
$f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(-3,-1,5,0),(-1,-7,0,5),(0,0,1,0),(-1,-2,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.51.** Se $k \neq 0$, allora $f$ non è semplice;
se $k = 0$, allora $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.52.** Se $k \neq -1$, allora $f$ è semplice;
se $k = -1$, allora $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.53.** $f$ è semplice per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 7.3.54.** Se $k \neq 2$, allora $f$ non è semplice;
se $k = 2$, allora $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.55.** Se $k \neq 2$, allora $f$ è semplice;
se $k = 2$, allora $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.56.** Se $k \neq 4$, allora $f$ è semplice;
se $k = 4$, allora $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.57.** Se $k \neq 0$ e $k \neq 2$, allora $f$ è semplice;
se $k = 0$ o $k = 2$, $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.58.** $f$ non è semplice per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 7.3.59.** Se $k \neq 2$, allora $f$ è semplice;
se $k = 2$, allora $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.60.** Se $k \neq 1$, allora $f$ non è semplice;
se $k = 1$, allora $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.61.** Per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, se $h \neq k$, allora $f$ è semplice, se $h = k$, $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.62.** Se $k \neq 2$, allora $f$ non è semplice;
se $k = 2$, allora $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.63.** $f$ non è semplice per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 7.3.64.** $f$ è semplice se e solo se $k = 1$.

**Esercizio 7.3.65.** $f$ è semplice se e solo se $k \neq 1$, $k \neq 2$ e $k \neq 3$.

**Esercizio 7.3.66.** $f$ è semplice se e solo se $k = 2$.

**Esercizio 7.3.67.** $f$ è semplice per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 7.3.68.** $f$ è semplice se e solo se $k \neq -1$.

**Esercizio 7.3.69.** $f$ è semplice se e solo se $k \neq 0$.

**Esercizio 7.3.70.** $f$ non è semplice per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 7.3.71.** (1) $f$ è semplice se e solo se $k = 1$;
(2) $f$ non è un isomorfismo se e solo se $k = 2$;
(3) $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0)\}$ è una base di $V_0$,

$$V_0\colon \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 7.3.72.** $f$ è semplice;

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, -1, 0), (1, 0, 0, 0, 0, -1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$$

è una base di autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.73.** (3) $f$ è semplice;

$$(2) \qquad M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \qquad V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \,\middle|\, 2a_{11} - 2a_{12} + a_{21} = 0,\ a_{11} + a_{22} = 0 \right\},$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \,\middle|\, 2a_{12} + a_{21} = 0,\ -a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0 \right\}$$

**Esercizio 7.3.74.** $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.75.** Non esiste un isomorfismo con tale polinomio caratteristico.

**Esercizio 7.3.76.** $f$ è semplice se e solo se $k \neq -1$ e $k \neq 1$.

**Esercizio 7.3.77.**

$$(2) \qquad M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $f$ non è semplice;
(4) l'insieme degli elementi degli autospazi di $f$ che appartengono anche a $S$ è dato dall'intersezione

$$V_2 \cap S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$.

**Esercizio 7.3.78.** (1) $f$ è semplice;
(2) l'insieme degli elementi degli autospazi di $f$ che appartengono a $U$ è l'insieme nullo $\{\mathbf{0}\}$ ed è dunque un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 7.3.79.** (1) $f$ è semplice;

$$(2) \qquad V_{-1}: \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0; \end{cases} \qquad V_1: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

(3) L'insieme degli elementi degli autospazi di $f$ che appartengono a $U$ è

$$(U \cap V_1) \cup (U \cap V_{-1}) = \langle (0,1,1,0) \rangle \cup \langle (-1,1,1,-1) \rangle$$

e non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 7.3.81.** (1) $f$ è semplice;

$$(2) \qquad V_{-2}: \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0; \end{cases} \qquad V_1: \ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0.$$

(3) l'insieme degli elementi degli autospazi di $f$ che appartengono a $U$ è

$$(U \cap V_1) = \langle (-1,-2,1,0), (2,2,0,1) \rangle,$$

che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 7.3.82.** Non esiste un tale endomorfismo.

**Esercizio 7.3.84.** (1) $f$ non è semplice;

$$(2) \qquad V_{-2}: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0; \end{cases} \qquad V_1: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

(3) $f^{-1}(V_{-2}) = V_{-2}$; $f^{-1}(V_1) = V_1$.

**Esercizio 7.3.85.** Un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfi le relazioni richieste è definito da

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_2 - x_3, x_1 - x_3, -2x_1 + x_2 + x_3)$$

, per ogni $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$; $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.86.** $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.87.** $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.88.** Un endomorfismo che soddisfi le proprietà richieste è definito da

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1 + x_2, 3x_2, 3x_3, 3x_4),$$

per ogni $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$.

**Esercizio 7.3.89.** I possibili autovalori sono 1 e $-1$. L'identità $\mathrm{id}\colon V \to V$ ha 1 come autovalore, mentre il suo opposto $-\mathrm{id}\colon V \to V$ ha $-1$ come autovalore.

**Esercizio 7.3.90.** $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.91.** $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.92.** Un endomorfismo che soddisfi le proprietà richieste è definito da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$.

**Esercizio 7.3.93.** $f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{(t-1)^3, (t-1)^2, (t-1), 1\}$ è una base di autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.94.** $f$ è semplice e $\mathcal{B} = \{t(t^2-1), t^2-1, t, 1\}$ è una base di autovettori per $f$.

**Esercizio 7.3.95.** Non esiste un tale endomorfismo.

**Esercizio 7.3.96.** $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.97.** I possibili autovalori sono 0 e 1. L'identità $\mathrm{id}\colon V \to V$ ha 1 come autovalore. L'endomorfismo nullo ha 0 come autovalore.

**Esercizio 7.3.98.** Un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che soddisfi le proprietà richieste è definito

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1, 3x_2, 3x_2, 3x_1),$$

per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$; $f$ è semplice.

**Esercizio 7.3.99.** $f$ non è semplice.

**Esercizio 7.3.100.** $f$ non è semplice.

## A.8 Spazi vettoriali euclidei

**Esercizio 8.5.1.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ non è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.2.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ non è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.3.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ non è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.4.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.5.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ non è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.6.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ non è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.7.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.8.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ non è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.9.** $(\mathbb{R}^2, \odot)$ è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.10.** $(\mathbb{R}^3, \odot)$ non è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.11.** $(\mathbb{R}^3, \odot)$ è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.12.** $(\mathbb{R}^3, \odot)$ non è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.13.** $(\mathbb{R}_2[t], \odot)$ è uno spazio vettoriale euclideo.

**Esercizio 8.5.14.** $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{2}$; $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{10}$; $\|\mathbf{v}_3\| = 2\sqrt{2}$; $\|\mathbf{v}_4\| = \sqrt{13}$.

**Esercizio 8.5.15.** $\|\mathbf{v}_1\| = 3$; $\|\mathbf{v}_2\| = 5$; $\|\mathbf{v}_3\| = 6$; $\|\mathbf{v}_4\| = 7$.

**Esercizio 8.5.16.** $\|\mathbf{v}_1\| = 9$; $\|\mathbf{v}_2\| = 5$; $\|\mathbf{v}_3\| = 5\sqrt{2}$; $\|\mathbf{v}_4\| = 10$.

**Esercizio 8.5.17.** $\|\mathbf{v}_1\| = 4$; $\|\mathbf{v}_2\| = 5\sqrt{2}$; $\|\mathbf{v}_3\| = 7$; $\|\mathbf{v}_4\| = 10$.

**Esercizio 8.5.18.** $\|\mathbf{v}_1\| = 2\sqrt{5}$; $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{66}$; $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{35}$; $\|\mathbf{v}_4\| = 9$.

**Esercizio 8.5.19.** $\|\mathbf{v}_1\| = 6$; $\|\mathbf{v}_2\| = 12$; $\|\mathbf{v}_3\| = 10$; $\|\mathbf{v}_4\| = 20$.

**Esercizio 8.5.20.** $\|\mathbf{v}_1\| = 4$; $\|\mathbf{v}_2\| = 4\sqrt{3}$; $\|\mathbf{v}_3\| = 5\sqrt{2}$; $\|\mathbf{v}_4\| = 4\sqrt{2}$.

**Esercizio 8.5.21.** (1) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono tra loro ortogonali; (2) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro ortogonali (3) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono tra loro ortogonali; (4) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro ortogonali.

**Esercizio 8.5.22.** (1) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro ortogonali; (2) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro ortogonali (3) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono tra loro ortogonali; (4) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono tra loro ortogonali.

**Esercizio 8.5.23.** (1) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono tra loro ortogonali; (2) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono tra loro ortogonali (3) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro ortogonali; (4) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro ortogonali.

**Esercizio 8.5.24.** (1) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono tra loro ortogonali; (2) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro ortogonali (3) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono tra loro ortogonali; (4) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro ortogonali.

**Esercizio 8.5.25.** $\|\mathbf{v}\| = 3$ se e solo se $k = -2$ o $k = 2$.

**Esercizio 8.5.26.** $\|\mathbf{v}\| = 7$ se e solo se $k = -6$ o $k = 6$.

**Esercizio 8.5.27.** $\|\mathbf{v}\| = 3$ se e solo se $k = -\sqrt{3}$ o $k = \sqrt{3}$.

**Esercizio 8.5.28.** $\|\mathbf{v}\| = 5$ se e solo se $k = -2$ o $k = 2$.

**Esercizio 8.5.29.** $\|\mathbf{v}\| = 5$ se e solo se $k = -\sqrt{2}$ o $k = \sqrt{2}$.

**Esercizio 8.5.30.** $\|\mathbf{v}\| = 5$ se e solo se $k = -3$ o $k = 3$.

**Esercizio 8.5.31.** $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali se e solo se $k = 1$.

**Esercizio 8.5.32.** $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali se e solo se $k = 3$.

**Esercizio 8.5.33.** $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali se e solo se $k = -5$.

**Esercizio 8.5.34.** $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali se e solo se $k = -2$ o $k = 2$.

**Esercizio 8.5.35.** $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali se e solo se $k = 6$.

**Esercizio 8.5.36.** $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono ortogonali per alcun $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 8.5.37.** L'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è $\pi/3$; la distanza tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è $\sqrt{2}$.

**Esercizio 8.5.38.** L'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è $\pi/2$; la distanza tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è $\sqrt{11}$.

**Esercizio 8.5.39.** L'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è $2\pi/3$; la distanza tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è $2\sqrt{3}$.

**Esercizio 8.5.40.** L'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è $\pi/3$; la distanza tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è $\sqrt{10}$.

**Esercizio 8.5.41.** L'angolo tra $p_1(t)$ e $p_2(t)$ è $\arccos(2/3)$; la distanza tra $p_1(t)$ e $p_2(t)$ è 2.

**Esercizio 8.5.42.** $W^\perp = \langle (1,-1,2) \rangle$;
$\mathcal{B} = \{(1,-1,2)\}$ è una base di $W^\perp$.

**Esercizio 8.5.43.** $U^\perp = \langle (1,-1,0), (1,0,1) \rangle$;
$\mathcal{B} = \{(1,-1,0), (1,0,1)\}$ è una base di $U^\perp$.

**Esercizio 8.5.44.** $Z^\perp = \langle (1,1,-1,2), (1,-1,-1,-1) \rangle$;
$\mathcal{B} = \{(1,1,-1,2), (1,-1,-1,-1)\}$ è una base di $Z^\perp$.

**Esercizio 8.5.45.** $S^\perp = \langle (2,0,1,-1), (1,1,-1,0) \rangle$;
$\mathcal{B} = \{(2,0,1,-1), (1,1,-1,0)\}$ è una base di $S^\perp$.

**Esercizio 8.5.46.** $W^\perp = \langle (-1,2,3) \rangle$; $\mathcal{B} = \{(-1,2,3)\}$ è una base di $W^\perp$.

**Esercizio 8.5.47.** $U^\perp = \langle (1,4,0), (1,0,4) \rangle$;
$\mathcal{B} = \{(1,4,0), (1,0,4)\}$ è una base di $U^\perp$.

**Esercizio 8.5.48.** $T^\perp = \langle (-4,0,-2,1) \rangle$; $\mathcal{B} = \{(-4,0,-2,1)\}$ è una base di $T^\perp$.

**Esercizio 8.5.49.** $Z^\perp = \langle (-11,-6,1,0), (-22,-13,0,1) \rangle$;
$\mathcal{B} = \{(-11,-6,1,0), (-22,-13,0,1)\}$ è una base di $Z^\perp$.

**Esercizio 8.5.50.** $U^\perp = \langle (1,2,0,0), (1,0,-4,6) \rangle$;
$\mathcal{B} = \{(1,2,0,0), (1,0,-4,6)\}$ è una base di $U^\perp$.

**Esercizio 8.5.51.** $W^\perp = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 0 \right\}$;
$\mathcal{B} = \{(3,2,0), (-6,0,1)\}$ è una base di $W^\perp$

**Esercizio 8.5.52.** $\mathcal{B} = \{(1,0,-1)\}$ è una base di $U^\perp$;

$$U^\perp\colon \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 8.5.53.** $\mathcal{B} = \{(-16,-1,12,0), (0,-3,0,4)\}$ è una base di $W^\perp$;

$$W^\perp\colon \begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = 0, \\ 12x_2 + x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 8.5.54.** $Z^\perp\colon\ 2x_1 - 3x_3 = 0$;
$\mathcal{B} = \{(0,1,0),(3,0,2)\}$ è una base di $Z^\perp$.

**Esercizio 8.5.55.** $\mathcal{B} = \{(-1,2,0,0),(0,0,-1,1)\}$ è una base di $Z^\perp$;

$$Z^\perp\colon\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 8.5.56.** Una base ortonormale di $U$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right), \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.57.** Una base ortonormale di $W$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.58.** Una base ortonormale di $W$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.59.** Una base ortonormale di $W$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.60.** Una base ortonormale di $R$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}\right), \left(\frac{\sqrt{15}}{5}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.61.** $\mathcal{B} = \mathcal{E}_4$ è una base ortonormale di $R$.

**Esercizio 8.5.62.** Una base ortonormale di $Z$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{15}, -\frac{\sqrt{10}}{15}, \frac{\sqrt{10}}{30}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.63.** Una base ortonormale di $W$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{110}}{110}, -\frac{3\sqrt{110}}{110}, \frac{\sqrt{110}}{11}, 0\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{2\sqrt{165}}{165}, \frac{2\sqrt{165}}{55}, \frac{2\sqrt{165}}{165}, \frac{\sqrt{165}}{15}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.64.** Una base ortonormale di $Z$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{21}}{42}, \frac{\sqrt{21}}{42}, \frac{\sqrt{21}}{42}, \frac{3\sqrt{21}}{14}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.65.** Una base ortonormale di $U$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, 0, 0\right), \left(-\frac{2\sqrt{34}}{51}, \frac{\sqrt{34}}{102}, \frac{\sqrt{34}}{6}, 0\right), \left(\frac{2\sqrt{38}}{57}, -\frac{\sqrt{38}}{114}, \frac{\sqrt{38}}{114}, \frac{3\sqrt{38}}{19}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.66.** Una base ortonormale di $S$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0\right), \left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0, 0, 0, 0, 1)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.67.** Una base ortonormale di $W$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}, 0\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{\sqrt{10}}{20}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{20}, -\frac{3\sqrt{10}}{20}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.68.** Una base ortonormale di $U$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}, 0\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{\sqrt{35}}{35}, \frac{2\sqrt{35}}{35}, \frac{2\sqrt{35}}{35}, -\frac{\sqrt{35}}{35}, \frac{\sqrt{35}}{7}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.69.** Una base ortonormale di $T$ è

$$\mathcal{B} = \left\{(0, 1, 0, 0, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), (0, 0, 0, 1, 0), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.70.** Una base ortonormale di $S$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}, -\frac{\sqrt{5}}{10}, -\frac{\sqrt{5}}{10}, -\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.71.** Una base ortonormale di $U$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.72.** Una base ortonormale di $W$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{7}}{14}, \frac{3\sqrt{7}}{14}, -\frac{2\sqrt{7}}{7})\}.\right.\right.$$

**Esercizio 8.5.73.** Una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, \odot)$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 0\right), \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.74.** Una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, \odot)$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}, 0, 0\right), (0, 1, 0), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right\}.$$

**Esercizio 8.5.75.** Una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2[t], \odot)$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2}\left(t^2 - \frac{4}{5}t\right), \frac{\sqrt{5}}{5}t, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

**Esercizio 8.5.76.** $A$ e $C$ sono matrici ortogonali; $B$ non è una matrice ortogonale.

**Esercizio 8.5.77.** $A$ e $B$ sono matrici ortogonali; $C$ non è una matrice ortogonale.

**Esercizio 8.5.78.** $A$ e $B$ sono matrici ortogonali.

**Esercizio 8.5.79.** $A$ e $B$ sono matrici ortogonali.

**Esercizio 8.5.80.** $f$ non è un'isometria di $\mathbb{E}^2$.

**Esercizio 8.5.81.** $f$ è un'isometria di $\mathbb{E}^2$.

**Esercizio 8.5.82.** $f$ è un'isometria di $\mathbb{E}^2$.

**Esercizio 8.5.83.** $f$ è un'isometria di $\mathbb{E}^3$.

**Esercizio 8.5.84.** $f$ non è un'isometria di $\mathbb{E}^3$.

**Esercizio 8.5.85.** $f$ è un'isometria di $\mathbb{E}^3$.

**Esercizio 8.5.86.** $f$ è un'isometria di $(\mathbb{R}^2, \odot)$.

**Esercizio 8.5.87.** $f$ non è un'isometria di $(\mathbb{R}^2, \odot)$.

**Esercizio 8.5.88.** $f$ è un'isometria di $(\mathbb{R}^2, \odot)$.

**Esercizio 8.5.89.** $f$ è un'isometria di $(\mathbb{R}^3, \odot)$.

**Esercizio 8.5.90.** $f$ non è un'isometria di $(\mathbb{R}^3, \odot)$.

**Esercizio 8.5.91.** Una base ortonormale formata da autovettori per $f$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}.$$

**Esercizio 8.5.92.** Non esiste una base ortonormale formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 8.5.93.** Una base ortonormale formata da autovettori per $f$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}.$$

**Esercizio 8.5.94.** Una base ortonormale formata da autovettori per $f$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0, 1, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}.$$

**Esercizio 8.5.95.** Non esiste una base ortonormale formata da autovettori per $f$.

**Esercizio 8.5.96.** Una base ortonormale formata da autovettori per $f$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}.$$

**Esercizio 8.5.97.** Esiste una base ortonormale formata da autovettori se e solo se $k = 0$.

**Esercizio 8.5.98.** Esiste una base ortonormale formata da autovettori se e solo se $k = 1$.

**Esercizio 8.5.99.** Una base che soddisfi le proprietà richieste esiste.

**Esercizio 8.5.100.** Non esiste una base che soddisfi le proprietà richieste.

## A.9 Geometria analitica nello spazio

**Esercizio 9.5.1.** (1) $\overrightarrow{AB}$ non è parallelo a $\pi$; (2) $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a $\pi$; (3) $\overrightarrow{AB}$ non è parallelo a $\pi$; (4) $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a $\pi$.

**Esercizio 9.5.2.** (1) $\overrightarrow{AB}$ non è parallelo a $\pi$; (2) $\overrightarrow{AB}$ non è parallelo a $\pi$; (3) $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a $\pi$; (4) $\overrightarrow{AB}$ non è parallelo a $\pi$.

**Esercizio 9.5.3.** (1) $\overrightarrow{AB}$ è ortogonale a $\pi$; (2) $\overrightarrow{AB}$ non è ortogonale a $\pi$; (3) $\overrightarrow{AB}$ non è ortogonale a $\pi$; (4) $\overrightarrow{AB}$ è ortogonale a $\pi$.

**Esercizio 9.5.4.** (1) $\overrightarrow{AB}$ è ortogonale a $\pi$; (2) $\overrightarrow{AB}$ non è ortogonale a $\pi$; (3) $\overrightarrow{AB}$ non è ortogonale a $\pi$; (4) $\overrightarrow{AB}$ non è ortogonale a $\pi$.

**Esercizio 9.5.5.** $A \wedge B = (-2, 4, -2)$; $A \wedge C = (2, 2, -2)$; $B \wedge A = (2, -4, 2)$.

**Esercizio 9.5.6.** $B \wedge A = (2, 2, -1)$, $A \wedge C = (0, 0, 0)$, $B \wedge C = (-4, -4, 2)$.

**Esercizio 9.5.7.** $A \wedge B = (6, -6, 2)$; $A \wedge C = (2, -2, -8)$; $B \wedge C = (2, 11, -8)$.

**Esercizio 9.5.8.** $A \wedge B = (0, 0, 0)$; $A \wedge C = (-3, -6, -21)$; $B \wedge C = (-2, -4, -14)$.

**Esercizio 9.5.9.**

$$\pi\colon \begin{cases} x = s + t + 2, \\ y = -s - t, \\ z = -s + t, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.10.**

$$\pi\colon \begin{cases} x = 2s + 2t + 3, \\ y = 5s - 1, \\ z = s - t + 3, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}, \qquad \pi'\colon \begin{cases} x = 2s + 2t + 5, \\ y = 5s + 6, \\ z = s - t, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.11.**

$$\pi\colon \begin{cases} x = s - 2t + 4, \\ y = s - 4t + 2, \\ z = s - 3t - 2, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}, \qquad \pi'\colon \begin{cases} x = s - 2t + 3, \\ y = s - 4t + 3, \\ z = s - 3t + 3, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.12.**

$$r\colon \begin{cases} x = -3t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -3t + 3, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.13.**

$$r\colon \begin{cases} x = 2t, \\ y = 2t, \\ z = -2t - 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad r'\colon \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 2t + 2, \\ z = -2t + 3, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.14.**

$$r\colon \begin{cases} x = -3t + 4, \\ y = 2t - 1, \\ z = 2t + 7, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r'\colon \begin{cases} x = -3t + 5, \\ y = 2t - 1, \\ z = 2t + 5, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.15.**

$$\pi\colon\ x + 2y - 2z = 1, \qquad r\colon \begin{cases} x = t + 3, \\ y = 2t, \\ z = -2t + 3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.16.**

$$\pi\colon\ 2x - y + 3z = 2, \qquad r\colon \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t + 1, \\ z = 3t - 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.17.**

$$\pi\colon \begin{cases} x = s + 2t + 3, \\ y = -s - 3t + 2, \\ z = 3s + 2t + 1, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.18.**

$$\pi\colon \begin{cases} x = s - t + 2, \\ y = -2s - 3t + 5, \\ z = -s + 4, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}, \qquad \pi'\colon\ 3x - y + 5z = 8.$$

**Esercizio 9.5.19.**

$$\pi\colon \begin{cases} x = -5s' - 4t' + 6, \\ y = 3s' + 3t' - 3, \\ z = -7s' - 9t' + 6, \end{cases} \quad s', t' \in \mathbb{R}, \qquad r\colon \begin{cases} x = 6t'' + 17, \\ y = 17t'', \\ z = 3t'' + 6, \end{cases} \quad t'' \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.20.** $\pi\colon\ 3x - y - 2z = 1.$

**Esercizio 9.5.21.** $\pi\colon\ 9x + y + 6z = 8.$

**Esercizio 9.5.22.** $\pi\colon\ 3x - 5y + 4z = 2.$

**Esercizio 9.5.23.**

$$r\colon \begin{cases} x - 3z = -1, \\ y + 3z = 5. \end{cases}$$

**Esercizio 9.5.24.**

$$r\colon \begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

**Esercizio 9.5.25.** (1) $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a $\pi$; (2) $P \in \pi$; (3) un punto che soddisfa la proprietà richiesta è $B = (6, 4, 5)$.

**Esercizio 9.5.26.** (1) $\overrightarrow{AB}$ è ortogonale a $\pi$; (2) $P \in \pi$ se e solo se $k = 6$ ;

$$(3) \qquad \pi\colon \begin{cases} x = 2s - 3t - 1, \\ y = s, \\ z = t, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.27.** (1) $P \notin \pi$; (2) $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a $\pi$ se e solo se $k = 3$;
(3) $\pi\colon\ 3x - 5y - 2z = -7$.

**Esercizio 9.5.28.** (1) $P \notin \pi$; (2) $\overrightarrow{AB}$ non è ortogonale a $\pi$;

$$(3) \qquad r\colon \begin{cases} x = t + 1, \\ y = -1, \\ z = -t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.29.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono coincidenti; $\pi_1 = \pi_2\colon\ 3x - y - z = 7$.

**Esercizio 9.5.30.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti;

$$\pi_3\colon \begin{cases} x = s + 2t, \\ y = s + t, \\ z = s - 2t, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.31.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti; $P \notin \pi_1$, $P \notin P_2$.

**Esercizio 9.5.32.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti; $\mathrm{d}(P_1, \pi_1) = \sqrt{2}$; $\mathrm{d}(P_2, \pi_2) = 2\sqrt{2}$.

**Esercizio 9.5.33.** (1) $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti;

$$(2) \qquad r\colon \begin{cases} x = t - 6, \\ y = -2t, \\ z = 5t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(3) $Q = P = (-6, 0, 1)$.

**Esercizio 9.5.34.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti; $r$ interseca $\pi_1$ nel punto $P_1 = (0, -1, 0)$ e $\pi_2$ nel punto $P_2 = (0, -1, -1)$.

**Esercizio 9.5.35.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono coincidenti;

$$\pi_1\colon \begin{cases} x = 4s - 8t + 12, \\ y = s + 13, \\ z = 3t + 14, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.36.** (1) $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti; (2) $P \in \pi_1$;

$$(3) \qquad r\colon \begin{cases} x = t + 2, \\ y = 3t + 3, \\ z = 5t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.37.** $\pi_1$ e $\pi_2$ non sono ortogonali;

$$r\colon \begin{cases} x = -t - 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 3t + 2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.38.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono coincidenti; $P_1 \in \pi_1$, $P_2 \notin \pi_2$.

**Esercizio 9.5.39.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti;

$$r\colon \begin{cases} 2x + 5y - 3z - 5 = 0, \\ x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

**Esercizio 9.5.40.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti;

$$\pi\colon\ x - 2y = 0.$$

**Esercizio 9.5.41.** (1) $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti;

$$(2) \qquad r\colon \begin{cases} x = 11t + 2, \\ y = -7t + 1, \\ z = 10t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

(3) $\mathrm{d}(r, \pi_2) = 9\sqrt{29}/29$; (4) $r \cap \pi_1 = \emptyset$.

**Esercizio 9.5.42.** $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte; $\pi\colon\ x + y - z = 2$.

**Esercizio 9.5.43.** (1) $r_1$ e $r_2$ sono incidenti;
(2) $\pi_1\colon\ x - 2y + 3z = 3$, $\pi_2\colon\ 2x - y + 3z = 3$;

$$(3) \qquad r\colon \begin{cases} x = -t + 1, \\ y = t - 1, \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.44.** (1) $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
(2) $r_1$ e $r_2$ non sono perpendicolari;

$$(3) \qquad r_3\colon \begin{cases} x = t + 10, \\ y = 5t + 10, \\ z = t + 11, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.45.** $r_1$ e $r_2$ sono coincidenti;

$$\pi\colon \begin{cases} x = s, \\ y = t, \\ z = s + 1, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.46.** $r_1$ e $r_2$ sono coincidenti; $\pi\colon\ 3x + 7y + 4z = 12$.

**Esercizio 9.5.47.** $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte; $\pi\colon\ x - y + 6z = -3$.

**Esercizio 9.5.48.** (1) $r_1$ e $r_2$ sono sghembe; (2) $\pi\colon\ 5x + 3y + 5z = -19$;
(3) $\mathrm{d}(r_2, \pi) = 23\sqrt{59}/59$.

**Esercizio 9.5.49.** (1) $r_1$ e $r_2$ sono sghembe; (2) $P = (0, 1, 2)$;

$$(3) \qquad r\colon \begin{cases} x = -6t, \\ y = t + 1, \\ z = 7t + 2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(4) $\mathrm{d}(r_1, r_2) = \sqrt{86}/2$.

**Esercizio 9.5.50.** $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte; $\mathrm{d}(r_1, r_2) = \sqrt{14}/2$.

**Esercizio 9.5.51.** $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte;

$$r_3 = r_4\colon \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -3t, \\ z = -4t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.52.** (1) $r_1$ e $r_2$ sono incidenti;

$$(2) \qquad \pi_1\colon \begin{cases} x = s + t + 1, \\ y = 2s, \\ z = 2t + 1, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R};$$

(3) $\pi_2\colon\ 13x - 3y - 7z = 7$;

$$r\colon \begin{cases} 2x - y - z = 1, \\ 13x - 3y - 7z = 7. \end{cases}$$

**Esercizio 9.5.53.** (1) $r_1$ e $r_2$ sono sghembe; (2) $\pi\colon\ 2x + 2y + z = 9$;
(3) $\mathrm{d}(r_1, r_2) = 8/3$.

**Esercizio 9.5.54.** (1) $r$ e $\pi$ sono incidenti; (2) $P \in \pi$, $P \notin r$;

$$(3) \qquad r'\colon \begin{cases} x = 11t - 1, \\ y = 5t - 1, \\ z = 7t - 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.55.** (1) $r$ e $\pi$ sono disgiunti; (2) $\pi'\colon\ y - z = 0$;

$$(3) \qquad r'\colon \begin{cases} x = 4, \\ y = t, \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.56.** (1) $r$ e $\pi$ sono incidenti, $P = (9, -8, 6)$;
(2) $r$ e $\pi$ non sono ortogonali; (3) $\pi'\colon\ 2x + y - z = 10$, $\pi''\colon\ 2x + y - z = -2$

**Esercizio 9.5.57.** $r$ è contenuta in $\pi$;

$$\pi'\colon \begin{cases} x = 2s - 2t + 1, \\ y = 3s + 7t - 1, \\ z = -2s + 1, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.58.** $d(r, \pi) = \sqrt{22}/22$.

**Esercizio 9.5.59.** (1) $r$ e $\pi$ sono incidenti;
(2) $\pi'\colon\ 3y - 4z = 6$, $\pi''\colon\ 3y - 4z = -4$; (3) $P_1 = (3, 22/5, 9/5)$, $P_2 = (3, 12/5, 14/5)$.

**Esercizio 9.5.60.** $r$ e $\pi$ sono ortogonali; $\pi'\colon\ 17x + 7y + z = -16$; $\pi$ e $\pi'$ sono disgiunti e, pertanto, non esiste la retta di intersezione.

**Esercizio 9.5.61.** $r$ e $\pi$ sono incidenti; $\pi'\colon\ x - 2z = 0$.

**Esercizio 9.5.62.** (1) $r$ e $\pi$ sono disgiunti;

$$(2) \qquad r\colon \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 0, \\ z = t - 2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

(3) $r$ e $r'$ sono sghembe.

**Esercizio 9.5.63.** $r$ e $\pi$ sono incidenti; $r$ e $\pi$ non sono ortogonali.

**Esercizio 9.5.64.** $r$ è contenuta in $\pi$;

$$r'\colon \begin{cases} y = 0, \\ 5x - 8z = -24. \end{cases}$$

**Esercizio 9.5.65.** $r$ e $\pi$ sono incidenti; $\pi'\colon\ x - y - z = 0$

$$r'\colon \begin{cases} x = t + 5, \\ y = 21, \\ z = t - 16, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.66.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti per ogni $k \in \mathbb{R}$; $\pi_1$ e $\pi_2$ sono ortogonali se e solo se $k = -1$.

**Esercizio 9.5.67.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti per ogni $k \in \mathbb{R}$; $P \in \pi_1$ se e solo se $k = 4$; $P \notin \pi_2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 9.5.68.** Se $k \neq 1$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti; se $k = 1$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti; $\pi_3\colon\ x + y + z = 0$.

**Esercizio 9.5.69.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti per ogni $k \in \mathbb{R}$;

$$r\colon \begin{cases} 2x - y + 2kz = 0, \\ x - y - z = -1. \end{cases}$$

**Esercizio 9.5.70.** (1) Se $k \neq 0$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti;
se $k = 0$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti; (2) $\pi_1$ e $\pi_2$ non sono ortogonali per alcun $k \in \mathbb{R}$;
(3) $d(\pi_1, \pi_2) = \sqrt{2}/2$.

**Esercizio 9.5.71.** (1) $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti per ogni $k \in \mathbb{R}$;
se $k = 0$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti; (2) $\pi_1$ e $\pi_2$ sono ortogonali se e solo se $k = -1/2$;
(3) $\pi_3\colon\ 6x - 5y + 4z = 0$.

**Esercizio 9.5.72.** (1) Se $k \neq 2$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti;
se $k = 2$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti;

$$(2) \qquad r\colon \begin{cases} x = 2t, \\ y = -2t, \\ z = t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

$P_1 = P = (0, 0, 1)$; $P_2 = (2/9, -2/9, 10/9)$; (3) $\mathrm{d}(\pi_1, \pi_2) = 1/3$.

**Esercizio 9.5.73.** (1) $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(2) $\pi_1$ e $\pi_2$ sono ortogonali se e solo se $k = 1$;

$$(3) \qquad r\colon \begin{cases} x = 2, \\ y = -t + 1, \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.74.** Se $k \neq 2$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti;
se $k = 2$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti; $\mathrm{d}(\pi_1, \pi_2) = \sqrt{6}/3$.

**Esercizio 9.5.75.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti per ogni $k \in \mathbb{R}$;
$P \in \pi_2$ se e solo se $k = -1$;

$$r\colon \begin{cases} 2x - y = -2, \\ x - y - z = -1. \end{cases}$$

**Esercizio 9.5.76.** $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti per ogni $k \in \mathbb{R}$;
$\pi_1$ e $\pi_2$ sono ortogonali se e solo se $k = -2$; $\pi_3\colon\ 5x + 2y + z = -10$.

**Esercizio 9.5.77.** (1) Se $k \neq 0$ e $k \neq -2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = 0$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; se $k = -2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte;

$$(2) \qquad r_3\colon \begin{cases} x = 2t, \\ y = 2t, \\ z = t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

(3) $Q = (1, 0, 0)$; $\pi\colon\ y - 2z = 0$.

**Esercizio 9.5.78.** (1) Se $k \neq 2/3$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = 2/3$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; (2) $r_1$ e $r_2$ sono ortogonali se e solo se $k = 1$;
(3) $\pi\colon\ 2x - y - 2z = -1$; $\mathrm{d}(\pi, \pi') = 1/3$.

**Esercizio 9.5.79.** (1) Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = 0$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; se $k = -1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte;
(2) $r_1$ e $r_2$ sono ortogonali se e solo se $k = 1/2$; (3) $\mathrm{d}(r_1, r_2) = \sqrt{6}/3$;

$$(4) \qquad r_3\colon \begin{cases} x = t, \\ y = -t + 1, \\ z = -t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.80.** (1) Se $k \neq 1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = 1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; (2) $r_1$ e $r_2$ sono ortogonali se e solo se $k = 0$;
(3) $\pi\colon\ x + y = 1$; (4) $\pi_1\colon\ x - y - z = -1$; $\pi_2\colon\ z = 1$.

**Esercizio 9.5.81.** (1) Se $k \neq -1/2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = -1/2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; (2) per $k = -1/2$, allora $P = (1/3, 2/3, 0)$;
(3) per $k = -1/2$, le equazioni parametriche di $r_3$ sono

$$r_3\colon \begin{cases} x = 14t + \dfrac{1}{3}, \\ y = -13t + \dfrac{2}{3}, \\ z = -4t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.82.** Se $k \neq -3/5$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = -3/5$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; $P \in r_1$ se e solo se $k = 1$.

**Esercizio 9.5.83.** (1) Se $k \neq -1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = -1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; (2) $r_1$ e $r_2$ sono ortogonali se e solo se $k = 1/3$;
(3) se $k = -1$, allora $P = (-2, -3, 3)$; $\pi\colon\ x - y = 1$.

**Esercizio 9.5.84.** (1) Se $k \neq 2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = 2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte;
(2) $\pi\colon 4x - y - 2z = 2$;
(3) $\pi'\colon\ -3y + z = 2$.

**Esercizio 9.5.85.** Se $k \neq -1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = -1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte; se $k = -1$, allora $\mathrm{d}(r_1, r_2) = \sqrt{6}$.

**Esercizio 9.5.86.** Se $k \neq 1$ e $k \neq 5/2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = 1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte;
se $k = 5/2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti;
se $k = 1$, allora l'equazione cartesiana di $\pi$ è $\pi\colon\ x + 3y + 5z = 0$;
se $k = 5/2$, allora l'equazione cartesiana di $\pi$ è $\pi\colon\ x + 2z = 3$.

**Esercizio 9.5.87.** Se $k \neq 1$ e $k \neq 5/3$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = 1$ o $k = 5/3$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti;
$r_1$ e $r_2$ sono ortogonali se e solo se $k = -5$.

**Esercizio 9.5.88.** Se $k \neq 0$, allora $r_1$ e $r_2$ sono sghembe;
se $k = 0$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; $\mathrm{d}(r_1, r_2) \neq 1$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 9.5.89.** (1) Se $k \neq 10$, allora $r$ e $\pi$ sono incidenti;
se $k = 10$, allora $r$ e $\pi$ sono disgiunti; (2) $r$ è ortogonale a $\pi$ se e solo se $k = -1$;
(3) se $k = -1$, allora $P = (-8/11, 2/11, 3/11)$; (4) se $k = 10$, allora $\mathrm{d}(r, \pi) = 3\sqrt{11}/11$.

**Esercizio 9.5.90.** (1) Se $k \neq 1/2$, allora $r$ e $\pi$ sono incidenti;
se $k = 1/2$, allora $r$ è contenuta in $\pi$; (2) $r$ non è ortogonale a $\pi$ per alcun $k \in \mathbb{R}$;
(3) se $k = 1/2$, allora $\pi\colon\ 6x + 2y - 4z = -1$.

**Esercizio 9.5.91.** (1) $r$ e $\pi$ sono disgiunti per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(2) $r$ non è ortogonale a $\pi$ per alcun $k \in \mathbb{R}$;
(3) per ogni $k \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}(r, \pi) = 2\sqrt{1 + (k-1)^2}/(1 + (k-1)^2)$.

**Esercizio 9.5.92.** (1) Se $k \neq -2$, allora $r$ e $\pi$ sono incidenti;
se $k = -2$, allora $r$ e $\pi$ sono disgiunti; (2) $r$ e $\pi$ non sono ortogonali per alcun $k \in \mathbb{R}$;
(3) per $k = 1$, $\pi'\colon\ x - 2y + z = 1$.

**Esercizio 9.5.93.** (1) Se $k \neq 0$, allora $r$ e $\pi$ sono incidenti;
se $k = 0$, allora $r$ è contenuto in $\pi$; (2) per ogni $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $P = (1, -1/2, 1/2)$;
(3) Se $k = 0$,

$$r' : \begin{cases} x = t, \\ y = 4t, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 9.5.94.** (1) Se $k \neq 0$, allora $r$ e $\pi$ sono incidenti;
se $k = 0$, allora $r$ e $\pi$ sono disgiunti; (2) $r$ e $\pi$ non sono ortogonali per alcun $k \in \mathbb{R}$;
(3) per $k = 0$, $\mathrm{d}(r, \pi) = \sqrt{5}/5$.

**Esercizio 9.5.95.** Se $h = 0$ e $k = -1$ allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti;
se $h \neq 0$ o $k \neq -1$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti.

**Esercizio 9.5.96.** Se $h = -2$ e $k = -1$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti;
se $h = 2$ e $k = 1$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti; altrimenti, $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti.

**Esercizio 9.5.97.** Se $h = k = -1$, allora $\pi_1$ e $\pi_2$ sono disgiunti; altrimenti, $\pi_1$ e $\pi_2$ sono incidenti.

**Esercizio 9.5.98.** Se $h = 1$ e $k = -1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte;
se $h \neq 1$ e $k = -h/2 - 1/2$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; altrimenti, $r_1$ e $r_2$ sono sghembe.

**Esercizio 9.5.99.** Se $h > 0$ e $k = \pm\sqrt{1/h}$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; altrimenti, $r_1$ e $r_2$ sono sghembe.

**Esercizio 9.5.100.** Se $h = k = 1$, allora $r_1$ e $r_2$ sono parallele disgiunte;
se $h = 0$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; se $h \neq 0$, $h \neq 1$ e $k = 2 - h$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti;
se $h \neq 0$, $k \neq 1$ e $h = 2 - k$, allora $r_1$ e $r_2$ sono incidenti; altrimenti, $r_1$ e $r_2$ sono sghembe.